Algèbre linéaire 1. Fiche n°1

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

1. (1) On munit $\mathbb{R}^2$ de son addition usuelle et de la loi externe définie par :

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, 0).$$

$\mathbb{R}^2$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

(2) De même si $\lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, \frac{y}{\lambda})$ si $\lambda \neq 0$ et $0 \cdot (x,y) = (0,0)$.

(3) De même si $E =]0, +\infty[$ est muni des lois $\oplus$ et $\otimes$ définies par $x \oplus y = xy$ et $\lambda \otimes x = x^\lambda$ pour $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$?

2. Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E ?

(1) $E = \mathbb{R}^3$, muni des opérations internes et externes classiques.
$E_1 = \{(x,y,z) \in E / x + 2y + z = 0\}, E_2 = \{(x,y,z) \in E / x + xy - z = 0\}$
$E_3 = \{(x,y,z) \in E / |x| = |y|\}, E_4 = \{(x,y,z) \in E / x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 3z = 0\}$

(2) E est l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
$E_1 = \{f \in E / f \text{ est 2 fois continûment dérivable et } f" - 3f' + 6f = 0\}$,
$E_2 = \{f \in E / f(1) = 1\}$
$E_3 = \{f \in E / f \text{ continue}\}, E_4 = \{f \in E / \lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty\} \cup \{0_E\}$

(3) $E = \mathbb{R}[x]$ (ensemble des polynômes à coefficients réels).
$E_1 = \{P \in E / P(\alpha) = 0\}$ où α est un réel fixé,
$E_2 = \{P \in E / \exists Q \in E / P = QA\}$ où A est un polynôme fixé,
$E_3 = \{P \in E / d^o(P) \geq n\}$, où n est un entier fixé,
$E_4 = \{P \in E / xP' - P = 0\}$

(4) E est l'espace vectoriel des suites réelles.
$E_1 = \{(u_n) \in E / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ où a et b sont des réels fixés.
$E_2 = \{(u_n) \in E / (u_n) \text{ est une suite géométrique }\}$.

(5) $E = M_n(K)$ (ensemble des matrices de taille $n \times n$).
$E_1 = \{M \in E / AM = 0_E\}$, $E_2 = \{M \in E / AM = MA\}$ où A est une matrice fixée.
$E_3 = \{M \in E / M^2 = M\}$.

3. (1) Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

(2) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$ alors $F^c \cup \{0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E (où $F^c = E \setminus F$ est le complémentaire de F dans E).

4. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On munit l'ensemble $E \times F$ de deux lois (addition $+$ et multiplication externe .) en posant, pour tout $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ dans $E \times F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \text{et} \quad \lambda.(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Montrer que $(E \times F, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

5. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B deux parties non vides de E. Montrer que

(1) $A \subset B \Rightarrow Vect(A) \subset Vect(B)$

(2) A sous-espace vectoriel de $E \Longleftrightarrow A = Vect(A)$

(3) $Vect(Vect(A)) = Vect(A)$.

(4) $Vect(A) + Vect(B) = Vect(A \cup B)$.

(5) Si A et B sont des sous-espaces vectoriels de E alors $A + B = Vect(A \cup B)$.

(6) Si $u \in A$ est combinaison linéaire des éléments de $A \backslash \{u\}$, alors $Vect(A) = Vect\,(A \setminus \{u\})$.

(7) Si v est combinaison linéaire d'éléments de $A \cup \{u\}$ avec un coefficient non nul sur u, alors $Vect\,(A \cup \{u\}) = Vect\,(A \cup \{v\})$.

6. Soient E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $F = \{f \in E / f \text{ paire}\}$ et $G = \{f \in E / f \text{ impaire}\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.