Université de Picardie Jules Verne
Mathématiques
Licence 1
Année 2015-2016

Algèbre linéaire 1. Fiche n°2

Systèmes linéaires - familles génératrices, libres

1. Résoudre les problèmes suivants

(a) À une table : deux sandwiches, trois cocas, un café : 25,30 euros.
À une autre table : un sandwich, deux cocas, deux cafés : 17,10 euros.
À une troisième table : trois sandwiches, quatre cocas, trois cafés : 38,60 euros.
Quel est le prix d'un sandwich ? d'un coca ? d'un café ?

(b) Déterminer 4 entiers, sachant qu'en les additionnant 3 par 3, on obtient 22, 24, 26 et 30.

(c) J'ai cinquante-cinq fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons à nous deux 137 ans.
Quel est l'âge de chaque personne ?

2. a, b, c sont trois réels donnés, deux à deux distincts. Résoudre le système suivant par la méthode de Gauss.

$$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0 \\ x + by + b^2z + b^3 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0 \end{cases}$$

3. Dans chacun des cas, préciser si la famille de vecteurs donnée est génératrice de E. Préciser si elle est libre (si non, écrire l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des autres).

(1) $E = \mathbb{R}^2$ et la famille $\{(0,0),\ (1,2)\}$.

(2) $E = \mathbb{R}^2$ et la famille $\{(1,1),\ (4,5)\}$.

(3) $E = \mathbb{R}^3$ et la famille $\{(1,1,0),\ (1,2,1),\ (2,-3,1)\}$.

(4) $E = \mathbb{R}^3$ et la famille $\{(1,-1,1),\ (-1,2,1),\ (1,0,3)\}$.

(5) $E = \mathbb{R}^4$ et la famille :
$\{(1,1,-1,0),\ (1,3,3,1),\ (2,-3,1,1),\ (3,-4,-4,0)\}$.

4. Pour quelles valeurs du réel a, les vecteurs $u_1 = (a,1,1)$, $u_2 = (1,a,1)$ et $u_3 = (1,1,a)$ de $E = \mathbb{R}^3$ sont-ils linéairement indépendants ?

5. Dans chacun des cas, préciser si les vecteurs sont linéairement indépendants (si non, écrire l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des autres).

(1) Soient $E = \mathbb{K}[X]$ et Q_1, Q_2, Q_3 les polynômes définis par

$$Q_1(x) = 1 + x - x^2, \quad Q_2(x) = -1 + x + 2x^2, \quad Q_3(x) = -1 + 5x + 4x^2.$$

(2) Soient E l'e.v. des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $f, g, h \in E$ les fonctions définies par :

$$f(x) = \exp(x), \quad g(x) = \cos(x), \quad h(x) = \sin(x).$$

6. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ une famille libre de n vecteurs de E. On considère les vecteurs

$$v_i = u_i + u_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1, \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + u_1.$$

Pour quelles valeurs de n la famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est-elle libre ?

Bases - Dimension

7. (a) Montrer que les 3 polynômes $P_1(x) = x^2$, $P_2(x) = (x-1)^2$ et $P_3(x) = (x+1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Écrire sur cette base $Q(x) = 12$ et $R(x) = 3x^2 - 10x + 1$.

8. Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x,y,z) \in E / x + y + z = 0\}$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Donner une base et la dimension de F.

(b) Montrer que $E = F \oplus G$, où $G = Vect((2,1,0))$.

9. Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soient $p_0, p_1, \ldots, p_n$ des polynômes de E tel que le degré de p_i soit égal à i.
Montrer que $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ est une base de E.

10. (1) Dans l'exercice 2-1 de la fiche 1, déterminer une base et la dimension de E_1 et E_4.

(2) Dans l'exercice 2-2 de la fiche 1, déterminer une base et la dimension de E_1.

(3) Dans l'exercice 2-3 de la fiche 1, dans le cas où $E = \mathbb{K}_n[x]$:
Déterminer une base et la dimension de E_1 et E_4.
Montrer que si A est de degré $r > 0$, $E = E_2 \oplus \mathbb{K}_{r-1}[x]$. Donner la dimension de E_2.

(4) Dans l'exercice 2-5 de la fiche 1, déterminer une base et la dimension de :

— E_1 dans les cas suivants : $A = 0$; A est inversible ; pour $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$ où $(a,b) \neq (0,0)$.

— E_2 dans le cas où $n = 2$ et : $A = aI_2$; $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où $a \neq b$.

(5) Dans l'exercice 1-3 de la fiche 1, déterminer une base et la dimension de E.

11. Soit E l'e.v. des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $g : x \mapsto \cos x$, et pour tout réel a, soit $f_a : x \mapsto \sin(x + a)$.

(a) Montrer que $f_a \in Vect(f_0, g)$ pour tout a.

(b) En déduire que (f_a, f_b, f_c) est lié pour tout réel a, b, c.

12. Dans $\mathbb{R}^4$, on donne les vecteurs : $a = (1,2,3,0)$, $b = (0,-1,2,-2)$, $c = (3,7,7,2)$, $u = (1,-1,0,2)$ et $v = (0,-9,-9,6)$.

(a) Montrer que $c \in Vect(a,b)$ et $v \in Vect(a,u)$.

(b) Soient $V = Vect(a,b)$, $W = Vect(u,v)$. Trouver une base et la dimension de V, W, $V + W$ et $V \cap W$.

13. Lesquelles de ces assertions sont vraies ? (montrer toute assertion vraie et donner un contre-exemple pour chaque assertion fausse). E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(1) (x,y) est libre $\Longleftrightarrow$ il n'existe pas de scalaire $a \in \mathbb{K}$ tel que $y = a \cdot x$.

(2) (u_1, u_2, u_3) est libre $\Longleftrightarrow$ (u_1, u_2) , (u_1, u_3) et (u_2, u_3) sont libres.

(3) Si $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de E alors $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ non nuls, $(\alpha_1 u_1, \alpha_2 u_2, \ldots, \alpha_n u_n)$ est une base de E.

(4) Si $E = F \oplus G = F \oplus G'$ alors $G = G'$.

(5) Si dim $E = n$ et u_1, u_2, ..., u_m engendrent E, alors $m \geq n$.

(6) Si $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ est une base de F, $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une base de G et $F \cap G = \{0_E\}$, alors $(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une base de $F + G$.

(7) Si $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ est libre et $v \notin Vect(u_1, u_2, ..., u_m)$ alors $(u_1, u_2, \dots, u_m, v)$ est libre.

14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *rang d'une famille de vecteurs* le nombre maximum de vecteurs de la famille linéairement indépendants (*i.e.* la dimension du s.e.v. engendré par la famille).
Soit $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ une famille de n vecteurs de E de rang r. On extrait une famille de n' ($n' \leq n$) vecteurs de rang r'. Montrer que $r' \geq r + n' - n$.

15. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 3$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que dim $F = n - 1$, dim $G = n - 2$ et $G \not\subset F$.
Montrer que dim $(F \cap G) = n - 3$.
En déduire l'existence d'une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ soit une base de F et $(e_1, e_2, \dots, e_{n-3}, e_n)$ soit une base de G.

16. Soient $E = M_n(\mathbb{R})$ (matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels), $F = \{A \in E / {}^tA = A\}$ (matrices symétriques), et $G = \{A \in E / {}^tA = -A\}$ (matrices anti-symétriques).
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E dont on donnera une base et la dimension.
Montrer que $E = F \oplus G$.

17. Un système générateur est dit *minimal* si tout système obtenu en lui enlevant un vecteur n'est pas générateur. Un système libre est dit *maximal* si aucun système obtenu en lui ajoutant un vecteur n'est libre.
Montrer que :

(a) Tout système générateur minimal est libre.

(b) Tout système libre maximal est générateur.

(c) Il y a équivalence entre
  (i) $\mathcal{B}$ est une base de E.
  (ii) $\mathcal{B}$ est un système générateur minimal de E.
  (iii) $\mathcal{B}$ est un système libre maximal de E.

18. (Partiel 2007) Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[x]$, on donne les vecteurs :

$$P_1(x) = x^3 + x^2 + x + a \qquad P_2(x) = x^3 + x^2 + ax + 1$$
$$P_3(x) = x^3 + ax^2 + x + 1 \qquad P_4(x) = ax^3 + x^2 + x + 1$$

où a est un réel.
Soient $F = Vect(P_1, P_2)$ et $G = Vect(P_3, P_4)$.

(1) Déterminer suivant les valeurs de a :
  (a) une base et la dimension de F (resp. G).
  (b) une base et la dimension de $F + G$ (on distinguera les cas $a = 1$ et $a \neq 1$).
  (c) En déduire la dimension et une base de $F \cap G$.

(2) Pour quelles valeurs de a a-t-on $E = F \oplus G$?