Université de Picardie Jules Verne
Mathématiques
Licence 1
Année 2015-2016

Algèbre linéaire 1. Fiche n°3

Applications linéaires

1. Les applications suivantes sont-elles $\mathbb{K}$-linéaires ?

(1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y,\ y + z,\ z + x) \in \mathbb{R}^3$

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f : (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (xy,\ y) \in \mathbb{C}^2$

(3) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + 1,\ x - y) \in \mathbb{R}^2$

(4) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (|x|,\ y,\ 0) \in \mathbb{R}^3$

(5) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^0$) est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles et continuement dérivables (resp. continues). $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1 & \to & \mathcal{C}^0 \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$

(6) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([-1, 1]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\ dt \end{array} \right.$, où $\mathcal{C}^0([-1, 1])$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $[-1, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continues.

2. Déterminer une base de l'image et une base du noyau des applications linéaires suivantes :

(1) $f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x - y, y - x, 0)$;

(2) $f :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$;

(3) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P(X)) = P(X) - (X + 1)P'(X)$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$f(1, 0, 0) = (1, 0), \qquad f(0, 1, 0) = (1, 1), \qquad f(0, 0, 1) = (0, 1).$$

(1) Donner une famille génératrice de $Im(f)$.

(2) Déduire la dimension de $Im(f)$ puis celle de $Ker(f)$.

4. On considère l'application suivante : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1)) \end{array} \right.$

(1) Montrer que f est linéaire.

(2) Déterminer $Ker(f)$. f est-elle injective ?

(3) Déterminer le rang de f. En déduire que f est surjective.

(4) Montrer que $Ker(f) \oplus \mathbb{R}_1[X] = \mathbb{R}_3[X]$.

5. Pour m un paramètre réel, soit $f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f_m(x, y, z) = \big(x + y + z,\ mx + y + (m - 1)z,\ x + my + z\big).$$

(1) Montrer que pour tout m, f_m est linéaire.

(2) Déterminer suivant les valeurs de m le noyau et l'image de f_m.

(3) Pour quelles valeurs de m, f_m est-il un isomorphisme ?

(4) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Indiquer pour quelles valeurs de m les vecteurs $f_m(e_1)$, $f_m(e_2)$, $f_m(e_3)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Donner un exemple d'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ tel que $Im(u)$ soit engendré par $v_1 = (1,2,0)$ et $v_2 = (1,1,-1)$, et $Ker(u)$ soit engendré par $v_3 = (1,-1,0)$.

7. Soit E un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ et soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de E. Soit u l'endomorphisme de E définie par

$$\begin{cases} u(e_1) = -e_2 + e_3 - e_4 \\ u(e_2) = e_1 - e_2 + e_3 \\ u(e_3) = e_1 + e_4 \\ u(e_4) = e_2 - e_3 + e_4 \end{cases}$$

(a) Déterminer l'endomorphisme $u^2 := u \circ u$. En déduire que $Im(u) \subset Ker(u)$.

(b) Déterminer $Ker(u)$. En déduire que $Im(u) = Ker(u)$.

8. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle *projecteur* tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.

(1) Montrer que si p est un projecteur alors $(p(x) = x \Leftrightarrow x \in Im(p))$
et que $E = Ker(p) \oplus Im(p)$.

(2) Montrer que p est un projecteur ssi $Id - p$ est un projecteur.

(3) Montrer que si p est un projecteur alors $Im(p) = Ker(Id-p)$ et $Ker(p) = Im(Id-p)$.

(4) Montrer que si M et N sont deux sous-espaces supplémentaires de E, il existe un projecteur unique p tel que $Im(p) = M$ et $Ker(p) = N$. (On dit que p est la *projection de E sur M parallèlement à N*.)

9. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit p la projection de E sur $F = \{(x,y,z) \in E \mid x+y+z = 0\}$ parallèlement à $G = \{(x,y,z) \mid x = y = z\}$. Calculer $p(x,y,z)$ en fonction de (x,y,z).

10. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. Pour tout entier k non nul, on définit $u^k = u \circ u \circ ... \circ u$ (k fois). On suppose que u est *nilpotent d'ordre p*, c'est-à-dire que p est le plus petit entier tel que $u^p = 0$.

(1) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\{x, u(x), u^2(x), ..., u^{p-1}(x)\}$ est libre.

(2) En déduire que $u^n = 0$.

11. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. On considère l'endomorphisme f de E défini par $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = e_1$.

(1) Si x est un élément de E, calculer $f(x)$.

(2) Vérifier que $f^3 = Id_E$.

(3) On pose $V = Ker(f - Id_E)$ et $W = Ker(f^2 + f + Id_E)$.

(a) Trouver une base de V et une base de W.

(b) Montrer que $E = V \oplus W$.

(c) Montrer que $f(V) = V$ et $f(W) = W$.

12. Soient E et F des espaces vectoriels, et $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que

$$Ker(f) \subset Ker(g) \Longleftrightarrow \exists h \in \mathscr{L}(F) \text{ tel que } g = h \circ f.$$

13. Soient E, F et G des espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

(a) Montrer que $g \circ f = 0 \Longleftrightarrow Imf \subset Kerg$.
On suppose dans la suite que $E = F = G$.

(b) Montrer que si $f \circ g = g \circ f$, alors $f\big(Ker(g)\big) \subset Ker(g)$ et $f\big(Im(g)\big) \subset Im(g)$.

(c) Montrer que la réciproque est vrai lorsque g est un projecteur.

14. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $Ker(f), Ker(f-Id)$ et $Ker(f+Id)$ sont en somme directe.

15. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les 4 affirmations suivantes :

(1) $Ker(f) = Ker(f^2)$.

(2) $Im(f) \cap Ker(f) = \{0_E\}$.

(3) $Im(f) \oplus Ker(f) = E$.

(4) $Im(f) = Im(f^2)$.

16. Le but de cet exercice est de montrer (par l'absurde) qu'il n'est pas possible de paver un rectangle de taille $1 \times x$, où $x \notin \mathbb{Q}$, par des carrés. Paver signifie recouvrir sans dépasser et sans laisser de trous.
Supposons qu'il existe n carrés $C_1, \ldots, C_n$, de côté respectif $c_1, \ldots, c_n$, qui pavent le rectangle R de taille $1 \times x$. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}$ sur $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{Q}}$, et considérons le s.e.v V engendré par $x, c_1, \ldots, c_n$.

(a) Montrer que $\{1, x\}$ est une famille libre.

(b) Montrer qu'il existe une application linéaire $f : V \to \mathbb{R}$ telle que $f(1) = 1$ et $f(x) = -1$.

(c) On considère l'application v qui à tout rectangle de taille $a \times b$ associe $f(a)f(b)$.
Montrer que $v(R) = \sum_{i=1}^{n} v(C_i)$.

(d) Trouver une contradiction et conclure.