Université de Picardie Jules Verne
Mathématiques
Licence 1
Année 2015-2016

Algèbre linéaire 1. Fiche n°4

Applications linéaires et Matrices

1. On considère les applications linéaires f et g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, définies par

$$f(x,y,z) = (2x+3y-4z, 2y+z, 2z) \quad \text{et} \quad g(x,y,z) = (3x, 2x+3y, x+y+3z).$$

Déterminer les matrices associées à f, g, $f \circ g$, $g \circ f$, $f+g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer les matrices associées à f^n et g^n dans la base canonique, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soient $P_1(X) = 3X+2$ et $P_2(X) = 2X+3$ et soit $f : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X]$ l'application linéaire définie par $f(P) = P'$.
Montrer que (P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_1[X]$ et donner la matrice de f dans cette base.

3. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieur ou égal à n à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$. Calculer, dans la base $\{1, X, X^2, ..., X^n\}$, les matrices des applications linéaires $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ suivantes :

(1) $P(X) \mapsto P'(X)$;

(2) $P(X) \mapsto \frac{1}{2}(P(X) + P(-X))$;

(3) $P(X) \mapsto P(X) - P(0)$;

(4) $P(X) \mapsto 7\ P(X)$.

(5) $P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$;

4. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose

$$f_1 = -e_1 + e_3, \qquad f_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3, \qquad f_3 = e_1 - e_2 + e_3.$$

(1) Vérifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Donner la matrice de passage de la base canonique à la base (f_1, f_2, f_3).

(3) Donner la matrice de passage de la base (f_1, f_2, f_3) à la base canonique.

(4) Si un vecteur a pour coordonnées (x, y, z) dans la base canonique, quelles sont ses coordonnées dans (f_1, f_2, f_3) ?

5. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $u(x,y) = (x-2y, 3y)$.

(1) Déterminer la matrice de u dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.

(2) Soient $f_1 = e_1$ et $f_2 = e_1 + e_2$. Montrer que (f_1, f_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de u dans cette nouvelle base par deux méthodes.

6. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Soit u l'application linéaire associée à A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3).

(1) Soient $f_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_3$ et $f_3 = e_2 + e_3$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer la matrice de u dans la base (f_1, f_2, f_3).

7. Soit $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$A = \mathscr{M}_{\underline{e},\underline{e}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer $f(b_i)$ pour $b_1 = (1, -2, 1)$, $b_2 = (0, 2, -1)$, $b_3 = (0, 0, 1)$.

(2) Démontrer que $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) Déterminer $T = \mathscr{M}_{\underline{b},\underline{b}}(f)$. En déduire que f est bijective.

(4) Calculer N^2 pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire N^k pour $k \geq 0$.

(5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer T^n en fonction de n et N, puis en fonction de n uniquement.

(6) En déduire A^n en fonction de n.

8. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est $M = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que $\underline{e'} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, où

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3.$$

(2) Écrire la matrice de passage de la base canonique à la base $\underline{e'}$ et la matrice de passage de la base $\underline{e'}$ à la base canonique.

(3) Déterminer la matrice M' de u relativement à la base $\underline{e'}$.

(4) En déduire M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(5) Montrer que u est un isomorphisme et écrire la matrice de u^{-1} dans la base canonique.