Université de Picardie Jules Verne 2015 - 2016
L2 Mathématiques

Algèbre linéaire
Feuille 1: révisions

Exercice 1. Les familles suivantes sont-elles libres?

1. $(1,0,1),(0,2,2),(3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $(1,2,1,2,1),(2,1,2,1,2),(1,0,1,1,0),(0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 2. Montrer que les vecteurs $\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 3. Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Quelle est sa dimension?
3. Soit $F=\{P\in E|P'(0)=0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension?
4. Trouver un supplémentaire G de F. Trouver une base de E et une base de G.

Exercice 4.

1. Dire si les applications $f_i, 1\leq i\leq 6$, sont linéaires

$$\begin{aligned}
f_1 &: (x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto(2x+y,ax-y)\in\mathbb{R}^2,\\
f_2 &: (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto(xy,ax,y)\in\mathbb{R}^3,\\
f_3 &: P\in\mathbb{R}[X]\mapsto aP'+P\in\mathbb{R}[X],\\
f_4 &: P\in\mathbb{R}_3[X]\mapsto P'\in\mathbb{R}_2[X],\\
f_5 &: P\in\mathbb{R}_3[X]\mapsto(P(-1),P(0),P(1))\in\mathbb{R}^3,\\
f_6 &: P\in\mathbb{R}[X]\mapsto P-(X-2)P'\in\mathbb{R}[X].
\end{aligned}$$

2. Pour les applications linéaires trouvées ci-dessus, déterminer $\ker(f_i)$ et $\mathrm{Im}\,(f_i)$, en déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

Exercice 5. Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&2&0\\1&-1&3\end{pmatrix}$ dans la base canonique. Déterminer la matrice de f dans la base $(1,0,-1),(0,1,1),(1,0,1)$.

Exercice 6. On suppose que E est décomposé en somme directe de deux sous-espaces vectoriels non nuls : $E=F\oplus G$. On appelle projection de E sur F parallèlement à G l'endomorphisme $p_{F,G}$ de E qui à un élément x de E, écrit (de manière unique) sous la forme $x=y+z$, avec $y\in F$, $z\in G$ associe l'élément y. Que se passe-t-il si F ou G est nul ?

On appelle projecteur un endomorphisme de E qui vérifie $p^2=p$.

1. Soit $p = p_{F,G}$ la projection de E sur F parallèlement à G. Montrer que p est un endomorphisme. Déterminer le noyau $Ker(p)$ et l'image $Im(p)$. Montrer que p est un projecteur.

2. Réciproquement, soit p un projecteur. Montrer que l'on a $E = Ker(p) \oplus Im(p)$. Déterminer les restrictions de p à $Ker(p)$ et $Im(p)$. Montrer que p est une projection que l'on précisera.

Exercice 7. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} x_{n+1} & = & -9x_n & -18y_n \\ y_{n+1} & = & 6x_n & +12y_n \end{array} \right.$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$. On se propose dans ce problème de trouver les termes généraux de ces deux suites.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que la relation de récurrence linéaire ci-dessus soit équivalente à la relation $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

2. Trouver une expression de U_n en fonction de A et de U_0.

3. Trouver le noyau de A, et en donner une base B_1. Calculer le rang de A.

4. Montrer que l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{R}^2$ tels que $AX = 3X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa dimension ? En donner une base, qu'on notera B_2.

5. Montrer que la réunion $B_1 \cup B_2$ forme une base B de $\mathbb{R}^2$. Soit P la matrice formée des composantes des vecteurs de B relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que P est inversible, et que le produit $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D qu'on calculera.

6. Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$. Calculer D^n, et en déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Donner les termes généraux x_n et y_n.