Université de Picardie Jules Verne — 2015-2016
Faculté des Sciences — L2 S3

Algébre linéaire 2
Feuille d'exercices 2.

Exercice 1 Calculer les déterminants suivants:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 6 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 5 & a & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 4 & 0 & 9 \\ 8 & c & 4 & d & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix};\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 11 & 5 \\ 7 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 & 1 \\ 1 & 9 & b & 4 \end{vmatrix}$$

Calculer les déterminants suivants et déterminer pour quelles valeurs de x les matrices correspondantes sont inversibles:

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+7 \end{vmatrix}$$

(Indication pour le 2e déterminant: calculer $L_2 - L_1$)

Exercice 2 Montrer sans calculs que le déterminant suivant est nul:
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -15 & 60 & 12 \\ -1 & 0 & 6 & 17 & -11 \\ 15 & -6 & 0 & -3 & -8 \\ -60 & -17 & 3 & 0 & 9 \\ -12 & 11 & 8 & -9 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 3 Soient $a_1, a_2, ...a_n, x$ des nombres réels. On considére le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \dots & \dots & & & & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $D_n = a_1 x^{n-1} + D_{n-1}$ où D_{n-1} se déduit de D_n en supprimant la première colonne et la deuxième ligne.
2. Calculer D_n par récurrence.

Exercice 4 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans le base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice $A - \lambda\mathrm{Id}$.
2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $f - \lambda\mathrm{Id}$ est-il inversible?

Exercice 5 Soit A la matrice de taille n suivante, où a, b, c sont des réels (on suppose $b \neq c$).

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ c & a & b & \ddots & b \\ c & c & a & \ddots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \dots & a \end{pmatrix}$$

On note B la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. On introduit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \det(A + xB)$. Que valent $f(-c)$ et $f(-b)$?
2. Montrer que la fonction f peut sécrire $f(x) = \alpha x + \beta$, avec α, β réels.
3. Déterminer α et β grâce à la question 1).
4. Que vaut le déterminant de A?

Exercice 6 Soit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Soient $A \in M_p(K)$ et $B \in M_q(K)$. Calculer en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$ le déterminant de la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(K)$ (On pourra décomposer M comme produit de deux matrices de déterminant "évident" et utiliser la multiplicativité du déterminant).