

Algèbre linéaire 2
Feuille d'exercices 4.
Arithmétique des polynômes.

Exercice 1 Effectuer les divisions euclidiennes de

$$\begin{aligned} 3X^5 + 4X^2 + 1 &\text{ par } X^2 + 2X + 3, \\ 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 &\text{ par } X^3 + X + 2, \\ X^4 - X^3 + X - 2 &\text{ par } X^2 - 2X + 4. \end{aligned}$$

Exercice 2 Dans $\mathbb{C}[X]$, effectuer les divisions euclidiennes de

$$\begin{aligned} X^2 - 3iX - 5(1 + i) &\text{ par } X - 1 + i, \\ 4X^3 + X^2 &\text{ par } X + 1 + i. \end{aligned}$$

Exercice 3 Soit P un polynôme. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 1 et celui de la division de P par $X - b$ est -1 , ($a \neq b$), quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$?

Exercice 4 Déterminer $a, b \in \mathbb{Z}$ de façon à ce que le polynôme $aX^{n+1} - bX^n + 1$ soit divisible par le polynôme $(X - 1)^2$. Calculer alors le quotient des deux polynômes.

Exercice 5 Déterminer a et b dans \mathbb{R} tels que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

Exercice 6 Déterminer le pgcd des polynômes suivants :

$$\begin{aligned} X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 &\text{ et } X^4 + 2X^3 + X + 2, \\ X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1 &\text{ et } X^3 + X^2 - X - 1, \\ X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3 &\text{ et } X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1. \end{aligned}$$

Exercice 7 Soit les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} A &= (X + 3)^2(X + 1)(X^2 + 1)^3 \\ B &= (X + 3)^2(X + 2)^2(X^2 + 1) \\ C &= (X + 3)(X + 2)(X^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

1. Ecrire le pgcd et le ppcm de A et B .
2. Ecrire le pgcd et le ppcm des trois polynômes A , B et C .

Exercice 8 Trouver le pgcd des trois polynômes :

$$\begin{aligned} A &= X^5 + 4X^4 + 6X^3 + 6X^2 + 5X + 2 \\ B &= X^2 + 3X + 2 \\ C &= X^3 + 2X^2 + X + 2. \end{aligned}$$

Exercice 9 Montrer que les éléments $X^2 + X$, $X^2 - X$, $X^2 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux, mais ne sont pas premiers entre eux deux à deux.