Université de Picardie Jules Verne — 2015-2016
Faculté des Sciences — L2 S3

Algèbre linéaire 2
Feuille d'exercices 5.

Exercice 1 Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = 0$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 2 *Soit la matrice à coefficients réels,* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de* A.
2. *En utilisant la division euclidienne du polynôme* $P(X) = 2X^4 - 12X^3 + 19X^2 - 29X + 37$ *par le polynôme caractéristique de* A*, montrer qu'il existe des réels* α *et* β *tels que la matrice* $P(A)$ *soit égale à la matrice* $\alpha A + \beta I_2$ *(préciser les valeurs de* α *et* β*).*
3. *En déduire que la matrice* $P(A)$ *est inversible et écrire son inverse sous la forme* $\lambda A + \mu I_2$ *(* λ *et* μ *étant des réels à calculer).*

Exercice 3 *Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel* m*, le polynôme minimal de la matrice :*

$$A_m = \begin{pmatrix} 2m-5 & 1 & 1 & 4-m \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 5-m & -1 & m-1 & m-4 \\ 2m-10 & 2 & 2 & 8-m \end{pmatrix}$$

Exercice 4 *Soit la matrice à coefficients réels,* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer le polynôme caractéristique de* A *puis son polynôme minimal.*
2. *En déduire, pour tout entier strictement positif* n*, la matrice* A^n *en fonction de* A *et de* I_3.

Exercice 5 *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* n *à coefficients dans* $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ *étant* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, vérifiant la relation :*

$$A^2 + A + I_n = O$$

où I_n *désigne la matrice unité d'ordre* n.

1. *On suppose que* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, montrer que la matrice* A *est diagonalisable.*
2. *On suppose* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (a) *Montrer que la matrice* A *n'est pas diagonalisable.*
   (b) *Montrer que* n *est un entier pair.*
   (c) *On suppose* $n = 2$*. Construire une telle matrice.*
   (d) *Trouver, à l'aide de la question précédente et pour tout entier* n *pair, une matrice réelle* A *d'ordre* n *vérifiant la relation* $A^2 + A + I_n = O$.