Algèbre linéaire 2
Feuille d'exercices 6.

Exercice 1 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer A^2 en fonction de A.
2. En déduire le polynôme minimal de A.
3. A est-elle diagonalisable?

Exercice 2 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme minimal de A.
2. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. A est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$?
4. Trouver une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible telle que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme minimal de A.
2. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. A est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$?
4. Trouver une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible telle que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme minimal de A.
2. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$? La trigonaliser.

Exercice 5 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. A est-elle diagonalisable?
2. A est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Trouver une matrice $P \in M_4(\mathbb{R})$ inversible telle que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 Soit $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$.

1. Montrer que u est linéaire.
2. Calculer $u(X^k)$ et $u^2(X^k)$, pour $k = 0, ..., n$.
3. Montrer que u est diagonalisable (on pourra calculer le polynôme minimal de u).