Université Paris Diderot — Année 2015-2016

L1 Physique — **MP2, feuille n ° 1**

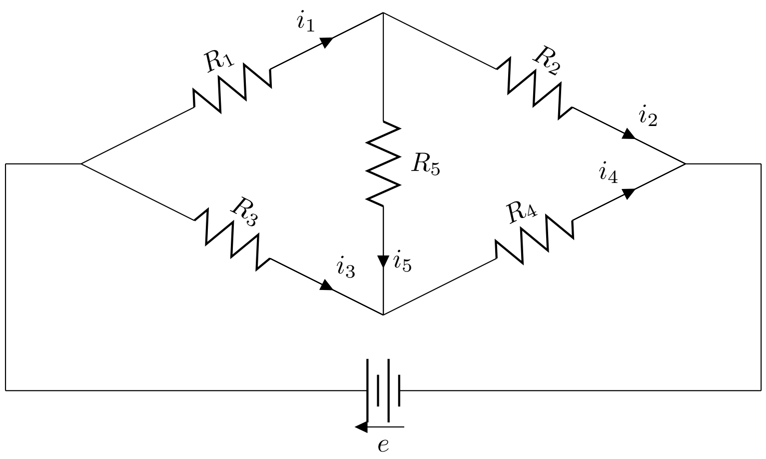
Exercice 1 Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues x, y, z (en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 8 \\ -3x+2y+8z &=& -1 \\ 2x+5y-3z &=& -5 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2y-3z &=& 5 \\ 2x-y+2z &=& -3 \\ 6x+y &=& 1 \end{array}\right.$$

Exercice 2 Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues x, y, z (en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss)

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x+3y+z &=& 0 \\ x+2y+3z &=& 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} -3x+z &=& 0 \\ 2x+y+4z &=& 0 \\ x+2y+9z &=& 1 \end{array}\right.$$

Exercice 3 Déterminer les intensités $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ qui parcourent le circuit suivant en fonction de la tension imposée e avec $R_j = 1$ pour $j = 2, \ldots, 5$ et $R_1 = 2$.
Indication : appliquer la loi des noeuds et la loi des mailles et résoudre par pivot de Gauss le système linéaire ainsi obtenu.



Exercice 4 Déterminer, suivant les paramètres a et b réels, si le système linéaire suivant a une solution :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+ay+z &=& 3 \\ x+2ay+z &=& 4 \\ x+y+bz &=& 3 \end{array}\right.$$

Lorsqu'il existe une solution, déterminer l'ensemble de toutes les solutions.

Exercice 5 (formules de Cramer en dimension 2) On étudie le système d'inconnues x, y et de paramètres a, b, c, d, u, v :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by &=& u \\ cx+dy &=& v \end{array}\right.$$

Posons $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Montrer que si cette quantité est non-nulle, alors il y a une unique solution :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Que se passe-t-il si $ad - bc = 0$?

Exercice 6 Effectuer tous les produits possibles de deux matrices choisies parmi les cinq suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 3A + 2I_3 = O_3$.
2. En déduire que A est inversible. Déterminer A^{-1}.

Exercice 9 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soit N la matrice vérifiant $A = 2I_3 + N$.

1. Calculer N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En déduire A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le système linéaire suivant, où a et b sont des paramètres donnés, possède une unique solution que l'on calculera

$$\begin{cases} 2x + y &= a \\ 5x + 2y &= b \end{cases}$$

2. Identifier B tel que la solution du système s'écrive $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
3. Vérifier que $AB = I$ et $BA = I$ et en déduire $B = A^{-1}$.

Mêmes questions avec la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et le système :

$$\begin{cases} x + y + z &= a \\ x + 2y + z &= b \\ x + y + 2z &= c \end{cases}$$

Exercice 11 (Quaternions) On définit les matrices suivantes à coefficients complexes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier les formules $J^2 = K^2 = L^2 = -I$, $JK = -KJ = L$, $KL = -LK = J$ et $LJ = -JL = K$.
2. Montrer également que, si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on a $(aI + bJ + cK + dL)(aI - bJ - cK - dL) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I$.
3. En déduire que si la matrice $M = aI + bJ + cK + dL$ n'est pas nulle, elle est inversible.

Exercice 12 Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et si oui, calculer les matrices inverses :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 Pour chacune de ces matrices, discuter suivant les valeurs du réel m si elle est inversible, et donner le cas échéant son inverse.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & m & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ m & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 ; on définit sa trace par $\mathrm{Tr}(A) = a + d$ et son déterminant par $\det(A) = ad - bc$.

1. Vérifier l'équation (théorème de Cayley-Hamilton en dimension deux) : $A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
2. Posons $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; montrer que pour toute matrice A on a l'égalité : $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)I_2$.
3. Montrer que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et que, dans ce cas : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
4. Supposons que $A^2 = 0$ (on dit que A est nilpotente), montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$.
5. Montrer que pour A et B matrices carrées de taille 2×2 on peut avoir $AB \neq BA$ mais qu'on a toujours $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Exercice 16 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$ une matrice de taille $m \times n$, on définit la transposée de A par la formule $A^t = (b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$, avec $b_{ij} = a_{ji}$ (noter que c'est une matrice de taille $n \times m$). Montrer que $(AB)^t = B^t A^t$ et, si A est carrée inversible $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. En déduire que, si A et B sont carrées et inversibles on a l'égalité $((AB)^t)^{-1} = (A^{-1})^t (B^{-1})^t$.