Université Paris Diderot Année 2015-2016

L1 Physique **MP2, feuille n ° 2**

Exercice 1 Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$.
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax\}$ où $a \in \mathbb{R}$.
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax + b\}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$.

Exercice 2 Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$ et $d = (5, 0, -7)$. Montrer que $\mathrm{Vect}\big(a, b\big) = \mathrm{Vect}\big(c, d\big)$.

Exercice 3 Parmi les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ énumérées ci-dessous, lesquelles sont libres ?

(a) $\mathcal{S}_1 = \{(1, 2, 1),\ (2, 3, 1),\ (0, 1, 1)\}$

(b) $\mathcal{S}_2 = \{(1, 2, 1),\ (2, 3, 1),\ (0, 1, 2),\ (3, 6, 4)\}$

(c) $\mathcal{S}_3 = \{(2, -3, 4),\ (3, -1, 7),\ (5, -4, 2)\}$

Exercice 4 Soit E_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$, et E_2 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 1, 1)$. Déterminer $E_1 \cap E_2$ et $E_1 + E_2$.

Exercice 5

1. Soient $P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$ et $P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x + 3y + 2z + 1 = 0\}$. Est-ce que P_1 et P_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
2. Soient $D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = 3z\}$ et $D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 1 = y = z\}$. Est-ce que D_1 et D_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6 Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, le vecteur $x = (2, 3, 1, 5)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs

$$a = (1, 3, 1, 2), \qquad b = (2, 5, 1, 1), \qquad c = (3, 1, 4, 2), \qquad d = (3, 2, 5, 5)\ ?$$

Exercice 7 Trouver une relation de dépendance linéaire entre les quatre vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$a = (3, 1, -1), \qquad b = (-1, 1, 2), \qquad c = (1, -1, 1), \qquad d = (5, -2, 3)$$

Exercice 8 Dans $\mathbb{R}^2$, on définit une addition par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

et une multiplication externe par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0).$$

Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ vérifie tous les axiomes d'espace vectoriel sauf un.

Exercice 9 Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels deux à deux disjoints. Montrer que les fonctions $x \to e^{a_1 x}$, …, $x \to e^{a_n x}$ sont linéairement indépendantes (i.e. sont des vecteurs linéairement indépendants de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Exercice 10 Trouver des bases des espaces vectoriels des solutions des systèmes d'équations linéaires (ce qui revient à décrire l'ensemble des solutions : pourquoi ?)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = & 0 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 & = & 0 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 11 Pour chacun des sev suivants, donner une base parmi la famille génératrice donnée, la dimension et un système d'équations minimal. Compléter la base de chaque sev, s'il y a lieu, en une base de $\mathbb{R}^n$ ($n = 3$ pour les questions 1, 2, 3, $n = 4$ pour les questions 5, 6).

1. $E = \text{Vect}\big((-1, 1, 1), (-1, 1, 2)\big)$.
2. $F = \text{Vect}\big((2, -3, 1), (1, 2, -3), (3, -1, -2)\big)$.
3. $G = \text{Vect}\big((1, 1, -2)\big)$.
4. $H = \text{Vect}\big((2, -1, 2, 1), (-1, 3, 0, 1), (1, 2, 2, 2)\big)$.
5. $K = \text{Vect}\big((-3, 1, 2, -1), (-3, 1, 2, 0)\big)$.

Exercice 12 Pour chacun des sev suivants de $\mathbb{R}^3$, donner une base, la dimension et un système d'équations minimal.

1. $E = \big\{(2x - y, x + y, -x + y),\ x, y, \in \mathbb{R}\big\}$.
2. $F = \big\{(x + 2y, y - 2x, y - x),\ x, y \in \mathbb{R}\big\}$.

Exercice 13 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère $a_1 = (2, -2, 3, 1)$ et $a_2 = (-1, 4, -6, -2)$.

1. Trouver des vecteurs a_3 et a_4 tels que $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer un système d'équations minimal pour le sev de $\mathbb{R}^4$ engendré par a_1 et a_2.

Exercice 14 On considère les deux familles de vecteurs dans $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{S}_1 = \big\{(1, -4, -2, 2), (-4, -2, 5, 4), (6, -6, -9, 0)\big\}$$

et

$$\mathcal{S}_2 = \big\{(-1, -2, 1, 2), (2, 1, -3, 1), (-1, 1, 1, 3)\big\}$$

Soient E_1 et E_2 les sev de $\mathbb{R}^4$ engendrés par $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$.

1. Montrer que $E_1 \subset E_2$.
2. Est-ce que $E_1 = E_2$? Si non, donner un vecteur de E_2 qui n'est pas dans E_1.

Exercice 15 On note $\mathcal{M}_n$ l'espace des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels. On note $\mathcal{S}_n$ le sous-ensemble des matrices symétriques, i.e. telles que $A^t = A$; on note $\mathcal{A}_n$ le sous-ensemble des matrices antisymétriques, i.e. telles que $A^t = -A$ et enfin on note $\mathcal{T}_n$ le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures i.e. telles que $a_{ij} = 0$ pour $i > j$.

1. Vérifier que $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{T}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n$.
2. Calculer les dimensions de $\mathcal{M}_n$, $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{T}_n$.
3. Calculer la dimension de la somme et de l'intersection de deux de ces sous-espaces.

Exercice 16 Trouver la dimension, des bases et des équations pour les espaces vectoriels $E \cap F$ et $E + F$.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, avec $E = \text{Vect}\big((1, 2, 1), (1, 1, -1), (1, 3, 3)\big)$ et $F = \text{Vect}\big((1, 2, 2), (2, 3, -1), (1, 3, -3)\big)$.
2. Dans $\mathbb{R}^5$, avec $E = \text{Vect}\big((-1, 6, 4, 7, -2), (2, 3, 0, 5, -2), (-3, 6, 5, 6, -5)\big)$ et $F = \text{Vect}\big((1, 1, 2, 1, -1), (0, -2, 0, -1, -5), (2, 0, 2, 1, -3)\big)$.

Exercice 17 On note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant d$.

1. Donner une base de $\mathbb{R}_d[X]$ et en déduire sa dimension.
2. Soient $P_0, \dots, P_d$ des polynômes tels que $\deg(P_i) = i$. Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}_d[X]$. [Indication : on pourra montrer qu'ils sont linéairement indépendants.]
3. Soit F l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant d$ et s'annulant en 0 et 1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_d[X]$ et calculer sa dimension.

Exercice 18 Soient U, V, W des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que si $\dim U + \dim V > \dim E$ alors $U \cap V \neq \{0\}$.
2. A-t-on toujours $U \cap (V+W) = U \cap V + U \cap W$?
3. Montrer que $(U+W) \cap (V+W) \cap (V+U) = (W+V) \cap U + (V+U) \cap W$.

Exercice 19 On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs lignes $e_1 = (1,0,1,0)$, $e_2 = (-1,1,1,1)$, $e_3 = (2,3,4,0)$ ainsi que $f_1 = (-1,2,-3,1)$, $f_2 = (-1,2,1,3)$, $f_3 = (-1,2,5,-1)$. On pose $E = \mathrm{Vect}\big(e_1, e_2, e_3\big)$ et $F = \mathrm{Vect}\big(f_1, f_2, f_3\big)$.

1. Calculer $\dim(E)$ et $\dim(F)$.
2. Trouver des équations et une base de $E \cap F$.
3. Extraire de $\{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$ une base de $\mathbb{R}^4$.