Université Paris Diderot Année 2015-2016
L1 Physique **MP2, feuille n ° 3**

Exercice 1 Parmi les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ suivantes, déterminer celles qui sont linéaires :

1. $f : (x, y, z) \to (x, xy, x + y)$.
2. $g : (x, y, z) \to (x + y, y - 2z, 0)$.
3. $h : (x, y, z) \to (x - y, y + z + 2, x - z)$.

Exercice 2 Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ déterminée par

$$f(e_1) = e'_1 + 2e'_2 + 3e'_3 + e'_4, \quad f(e_2) = e'_1 + e'_2 + 2e'_3, \quad f(e_3) = 2e'_1 + 2e'_2 + e'_3 + 3e'_4.$$

1. Donner la matrice associée à f dans les bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$.
2. Déterminer l'image du vecteur $(-1, 2, -3)$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
4. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = \big(- 12x - 15y - 3z, 8x + 10y + 2z, 8x + 10y + 2z\big)$$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner un système d'équations et une base pour chacun des sev $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Y a-t-il égalité ?
4. Montrer que $f \circ f = 0$.

Exercice 4 On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ telle que $f(P) = P'$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Même question pour l'application $g : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ telle que $g(P)$ est le polynôme $P(X + 1) - P(X)$.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z + 3t, -x + 3y + z - 3t, x - y + 2z + 4t, 2x + y - 3z - t)$$

f est-elle bijective ? Si oui, expliciter f^{-1} et en donner la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6 Pour chaque réel a on considère $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f_a(x, y, z) = (x - y - 2z, -x + ay + z, 2x + y - 3z)$$

1. Donner la matrice M_a de l'application linéaire f_a par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel a l'application f_a est-elle bijective ?
3. Lorsque f_a est inversible, donner la matrice de f_a^{-1}.

Exercice 7 On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x - y, z)$. On note $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_2$ celle de $\mathbb{R}^3$; on définit $\mathcal{B}_3 = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ et $\mathcal{B}_4 = \{(1, 0, -1), (4, 0, 3), (1, 1, 0)\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_4$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

2. Déterminer la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_3$, de $\mathcal{B}_3$ vers $\mathcal{B}_1$, de $\mathcal{B}_2$ vers $\mathcal{B}_4$, et de $\mathcal{B}_4$ vers $\mathcal{B}_2$.
3. Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$.
4. Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_4$ et $\mathcal{B}_3$.

Exercice 8 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la dimension et une base du noyau et faire de même pour l'image de f.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3$ est somme directe du noyau et de l'image.
3. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathcal{B}_2$ une base de $\mathrm{Im}(f)$, comment s'écrit la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$?

Exercice 9 Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur le plan d'équation $z = x - y$ parallèlement à $x = z, y = -x$.

Exercice 10 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $p : E \to E$ une application linéaire. On dit que p est un projecteur si $p \circ p = p$. Soit donc p un projecteur.

1. Calculer $(Id_E - p) \circ (Id_E - p)$ et en déduire que $Id_E - p$ est également un projecteur.
2. Calculer $p \circ (Id_E - p)$ et $(Id_E - p) \circ p$ et en déduire que $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(Id_E - p)$ et $\mathrm{Im} p = \mathrm{Ker}(Id_E - p)$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
4. Expliciter les restrictions de p à $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$.
5. Soit $x = u + v$ la décomposition d'un vecteur $x \in E$ avec $u \in \mathrm{Ker}(p)$ et $v \in \mathrm{Im}(p)$. Exprimer v, $p(u)$ et $p(v)$ en fonction de v.
6. On suppose que $E = F \oplus G$ et on écrit $x = u + v$ la décomposition d'un vecteur $x \in E$ avec $u \in F$ et $v \in G$; on définit $p : E \to E$ par $p(x) = u$. Montrer que p est un projecteur - on dit que p est la projection sur F parallèlement à G.
7. Soit $E = \mathbb{R}^3$, F le plan d'équation $x + y + z = 0$ et G la droite d'équations $x = y = z$. Vérifier que $F = \mathrm{Vect}\big((1, 0, -1), (1, -1, 0)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$ et que $E = F \oplus G$.
8. Calculer les coordonnées (x', y', z') de $p(x, y, z)$ où p est la projection sur F parallèlement à G (et F et G sont comme dans la question précédente).

Exercice 11 Soit l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y, z) = (2y - z, z - 2x, x - y)$.

1. Discuter, selon les valeurs des paramètres a, b, c, les solutions du système linéaire
$$\begin{cases} 2y - z &= a \\ z - 2x &= b \\ x - y &= c \end{cases}$$
2. En déduire des équations et des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que les vecteurs $b_1 = (1, 1, 2)$, $b_2 = (1, -1, 0)$ et $b_3 = (1, 1, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base. (On pourra commencer par calculer $f(b_1)$, $f(b_2)$ et $f(b_3)$ en fonction de b_1, b_2, b_3).

Exercice 12 Soit $u : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer les inclusions de sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u^3) \subset \cdots$.
2. Montrer que u envoie le sev $\mathrm{Ker}(u^2)$ dans le sev $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$.
3. Montrer que l'application $u : \mathrm{Ker}(u^2) \to \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$ est surjective.
4. En déduire l'inégalité : $\dim \mathrm{Ker}(u^2) \leqslant 2 \dim \mathrm{Ker}(u)$ et donner un exemple où $\dim \mathrm{Ker}(u^2) = 2 \dim \mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 13 On définit l'application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par :

$$u(x, y, z) = (x + 6y - z, x + z, x - 3y + 2z).$$

On note id l'application linéaire identité de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Ecrire la matrice A de u dans la base canonique $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.
2. Donner une base de $\mathrm{Im}(u)$ et une équation de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u - 3id)$ sont de dimension 1 ; donner un vecteur formant une base de chacun de ces sous-espaces.
4. Calculer la matrice de u^2 et en déduire que $\mathrm{Ker}(u^2)$ est un sous-espace de dimension 2, contenant $\mathrm{Ker}(u)$.
5. Construire une base f_1, f_2, f_3 de $\mathbb{R}^3$ telle que f_1 soit une base de $\mathrm{Ker}(u - 3id)$, f_2 une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\{f_2, f_3\}$ une base de $\mathrm{Ker}(u^2)$. Comment s'écrit la matrice B de u dans cette nouvelle base ?

Exercice 14 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ mais $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire le rang de f.
2. Soit e_3 un vecteur de E tel que $f(e_3) \neq 0$. On pose $e_2 = f(e_3)$, montrer qu'on peut choisir un vecteur e_1 dans $\mathrm{Ker}(f)$ non colinéaire avec e_2.
3. En déduire que $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.
4. (Exemple) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = 0$, choisir les vecteurs e_1, e_2 et e_3 comme ci-dessus et écrire la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Exercice 15 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z)$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et vérifier que $A^2 = 2A$.
2. Montrer que si $v \in \mathrm{Im}(f)$ alors $f(v) = 2v$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, et, si $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base de $\mathbb{R}^3$ formée par la réunion de ces bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$), écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 16 On note e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est donnée par $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. Soient $e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

1. Montrer que $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ et en déduire B la matrice de f dans la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$.
3. Ecrire la matrice de passage (que l'on notera P) de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ à la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$; calculer P^{-1}.
4. Ecrire la formule générale reliant A, B et P et faire la vérification de la formule obtenue.
5. Calculer B^4 et A^4.

Exercice 17 Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et E l'espace vectoriel des polynômes de degré $< d$. Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_d$ des réels distincts. On définit les polynômes

$$P_j(X) = \prod_{i=1, i \neq j}^{d} \frac{X - a_i}{a_j - a_i} \qquad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant d.$$

1. Vérifier que $P_j(a_i)=0$ si $i\neq j$ et $P_j(a_j)=1$. En déduire que les P_j forment une base de E.
2. Montrer que pour tous $(b_1,\ldots,b_d)\in\mathbb{R}^d$ il existe un unique polynôme $P\in E$ tel que $P(a_i)=b_i$ pour $1\leqslant i\leqslant d$.

Exercice 18 Soit u un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension n, tel que $u^2=id$.

1. Soit $x\in E$, montrer que le vecteur $x_1=u(x)+x$ (resp. $x_2=x-u(x)$) vérifie $u(x_1)=x_1$ (resp. $u(x_2)=-x_2$).
2. Montrer que $E=$Ker$(u-id)\oplus$Ker$(u+id)$.
3. En déduire l'existence d'un entier $s\in[0,n]$ et d'une base de E dans laquelle la matrice de u s'écrit : $\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{n-s}\end{pmatrix}$.