Université Paris Diderot Année 2015-2016
L1 Physique **MP2, feuille n ° 4**

1 Suites

Exercice 1 Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_0 = 90$ et $\lim_{n\to\infty}(u_0+u_1+\cdots+u_n) = 150$. Quelle est sa raison ?

Exercice 2 Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ n'est pas convergente.

Exercice 3 Montrer que les suites suivantes tendent vers une limite à préciser.

1. $u_n = \frac{n-1}{n^2+1}$, $v_n = \frac{n^2-1}{2n^2+n}$.
2. $u_n = -n^2 - n - 1$, $v_n = n + \frac{1}{n}$.
3. $u_n = \frac{4^n+n^2}{4^n+n}$, $v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{n}{n+1}$.
4. $u_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$, $v_n = \frac{2n^4-2n^2+n+1}{\sqrt{n^8-1}}$.
5. $u_n = \frac{[\sqrt{n}]}{n}$, $v_n = \frac{[\sqrt{n}]^2}{n}$, où $[x]$ désigne la partie entière de x (le plus grand entier inférieur ou égal à x).

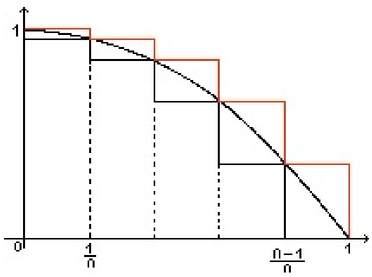
Exercice 4 Soient $a, b \in]0, +\infty[$. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$.

Exercice 5
1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{n^2-2}{n^2+n}$. Montrer que la suite est croissante et convergente et calculer sa limite.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{2+(-1)^n}{3^n}$. Montrer que la suite est décroissante et convergente et calculer sa limite.

Exercice 6 Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$.

1. Déterminer (avec une calculatrice) les cinq premiers termes de cette suite. Quelle semble être la limite de (u_n) ?
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique. En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Exercice 7 On cherche à calculer l'aire A de la surface comprise entre la portion de parabole d'équation $y = -x^2+1$ et les axes du repère cartésien. Pour cela, on divise $[0, 1]$ en n parties égales et on remarque que A est comprise entre l'aire A_n de la région délimitée par les rectangles (noirs) inférieurs et l'aire A'_n de la région délimitée par les rectangles (rouges) supérieurs :



1. Calculer A_n et A'_n en fonction de n. (On pourra commencer par montrer que : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).
2. En déduire la valeur de A.

Exercice 8 On considère les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Exercice 9
1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.
2. Montrer les inégalités suivantes si $b \geqslant a > 0$:

$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b \text{ et } a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$$

3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 \leqslant v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

   (a) Montrer que $u_n \leqslant v_n$ pour tout n.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) est une suite croissante.
   (d) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles ont même limite.

Exercice 10 Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$.

1. Donner une valeur approchée (à 10^{-3} près) de u_1, u_2, u_3, u_4.
2. Montrer par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
3. Résoudre l'inéquation $-x^2 + x + 2 \geqslant 0$. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n . En déduire que $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout entier n. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
4. Montrer que pour tout n, $|u_{n+1} - 2| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$. En déduire que pour tout n, $|u_n - 2| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$. Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice 11 Soit la suite de nombres réels (u_n) définie par $u_0 \in]1, 2]$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{3 + u_n^2}{4}$$

1. Montrer que $u_n \in]1, 2]$ pour tout n.
2. Montrer que la suite est décroissante. En déduire que la suite est convergente.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

2 Dérivées et sens de variations

Exercice 12
1. Trouver les extrema de la fonction définie par $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 36x^2$. Préciser la nature de ces extrema.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 1$. Déterminer a et b pour que $x = 1$ corresponde à un extremum local tel que $f(1) = 2$. Préciser la nature de cet extremum.

Exercice 13 On définit pour $x \in [0, \pi/2[$ la fonction $f(x) = \tan x - x$.

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Montrer que f définit une bijection de $[0, \pi/2[$ sur $[0, \infty[$.

Exercice 14 Calculer les dérivées des fonctions (on justifiera sur quel intervalle) : $f(x) = \log\log(x)$, $g(x) = \arctan\log(x)$, et $h(x) = \log\sqrt{1-2\sin^2 x}$, et en déduire leurs tableaux de variations.

Exercice 15

1. Montrer que pour tout $x \in]0, \pi/2[$, on a $\sin x < x$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in]0, \pi/2[$, on a $\tan x > x$.
   (b) Montrer que la fonction $f(x) = \sin(x)/x$ est strictement décroissante sur $]0, \pi/2]$.
   (c) En déduire que pour tout $x \in]0, \pi/2[$, on a $2x/\pi < \sin x$.

Exercice 16

1. Calculer la dérivée de $g(x) = (x^2+1)\sin x$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = (x^2+1)\cos x + 2x\sin x$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$.

Exercice 17 Montrer que $f(x) = x^5 - 10x + 1$ s'annule pour trois valeurs réelles.

Exercice 18 Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leqslant |x-y|$.

Exercice 19 Montrer que si $x > -1$, alors on a $\frac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$.

Exercice 20 * Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert contenant 0, montrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x} = \frac{f''(0)}{2}$$

(On pourra écrire $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(y)dy$ et utiliser le théorème des accroissements finis).

Exercice 21 Montrer que les fonctions suivantes admettent une fonction réciproque et l'expliciter :

1. $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x^2+x+2}{x^2+1}$.
2. $f : [-\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Exercice 22

1. Montrer que pout tout $x > 0$, on a les inégalités
$$\frac{1}{x+1} < \log(1+x) - \log(x) < \frac{1}{x}$$
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a
$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \log(n)$$
3. On pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n)$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente (remarque : la limite est la constante d'Euler γ qui vaut 0.577... ; on ignore toujours si c'est un nombre rationnel ou pas !).

Exercice 23 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in]0, +\infty[$.

1. Si une fonction f est concave, montrer que :
$$f\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\Big) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)$$
2. En utilisant la concavité du log, montrer que :
$$\Big(\prod_{i=1}^n x_i\Big)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

3. En déduire que $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Exercice 24 Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/q = 1$.

1. Montrer que pour tous $x, y > 0$, on a $xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
   (On pourra étudier la fonction $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$ pour un y fixé).
2. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i^p = \sum_{i=1}^n y_i^q = 1$.
   Montrer que $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant 1$.
3. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$. Montrer l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}$$
4. Application 1 : Soit $p > 1$. En écrivant $(x_i + y_i)^p = x_i(x_i + y_i)^{p-1} + y_i(x_i + y_i)^{p-1}$, et en appliquant l'inégalité de Hölder, montrer l'inégalité de Minkowski :
$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p}$$
5. Application 2 : Soit (a_n) une suite strictement positive, $u_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$.
   Montrer que si (u_n) converge, alors (v_n) converge aussi.