**Université Paris Diderot** — Année 2015-2016

L1 Physique — **MP2, feuille n ° 5**

**Exercice 1** Donner des primitives des fonctions suivantes :

$$x^n \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad x^a \quad (a \in \mathbb{R}), \qquad e^{ax} \quad (a \in \mathbb{R}^*), \qquad a^x \quad (a > 0, a \neq 1),$$
$$\cos(ax+b) \quad (a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}), \qquad \sin(ax+b) \quad (a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}), \qquad \log(x),$$
$$\frac{1}{(x-b)^2+a^2} \quad (a > 0, b \in \mathbb{R}), \qquad \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a > 0), \qquad \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \quad (a \in \mathbb{R}^*),$$
$$\frac{1}{\cos^2(x)}, \qquad \frac{1}{\cos(x)+1}, \qquad \frac{1}{\sin(x)}, \qquad \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

**Exercice 2** On rappelle que log ou ln désigne le logarithme népérien, c'est-à-dire la fonction définie, pour $x > 0$, par la formule :

$$\log x := \int_1^x \frac{dt}{t}$$

En utilisant les propriétés de l'intégrale montrer les propriétés suivantes du logarithme.

1. La fonction logarithme est croissante.
2. Si $x \geqslant 1$(resp. si $0 < x \leqslant 1$) alors $\log x \geqslant 0$ (resp. $\log x \leqslant 0$).
3. Utiliser (en les démontrant) les inégalités suivantes pour démontrer que $\frac{n}{2} \leqslant \log(2^n) \leqslant n$.
$$\frac{1}{2} = \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{2^{k+1}} \leqslant \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{t} \leqslant \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{2^k} = 1$$
4. Montrer que $\log(x^{-1}) = -\log(x)$ pour tout $x > 0$, en déduire :
$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$$

**Exercice 3** Résoudre cet exercice en utilisant le minimum de calcul.

1. Calculer la valeur des intégrales :
$$I_1 := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x(3+\sin^2 x)}{\cos^2 x + \cos x + 1} dx, \qquad I_2 := \int_{-1}^{1} x e^{x^2} dx$$
2. Justifier les majorations suivantes :
$$\Big| \int_0^1 \frac{\sin t}{1+t^2} dt \Big| \leqslant \frac{\pi}{4}, \qquad 1 - e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2} dx \leqslant e^{-1}$$
3. Calculer l'intégrale $\int_0^1 x e^x dx$ et en déduire la majoration (où $m$ est un réel) :
$$\Big| \int_0^1 \frac{x \sin(mx) e^x}{\sqrt{1+x^4}} dx \Big| \leqslant 1$$

**Exercice 4** Montrer que les suites suivantes sont convergentes et calculer leurs limites :

$$u_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} \quad \text{et} \quad v_n := n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2+j^2}$$

(indication : penser aux suites de Riemann)

**Exercice 5** Calculer des primitives des fonctions suivantes :

1. $x^4 - 6x^3 + 2$.

2. $\arctan(x)$.
3. $\tan(x)$.
4. $\dfrac{1}{\sin(x)}$.
5. $\sqrt[5]{2x+1}$.

**Exercice 6** Calculer des primitives des fonctions suivantes à l'aide de changements de variables :

1. $x(2x+1)^7$.
2. $\dfrac{1}{e^x+1}$.
3. $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$.
4. $\dfrac{1}{x\log^m x}$, où $m \in \mathbb{N}$.

**Exercice 7** Calculer des primitives des fonctions suivantes à l'aide d'intégrations par parties :

1. $x^2e^{-x}$.
2. $(x^3-2x+3)e^{-2x}$.
3. $\log(1+x^2)$.
4. $\cosh(x)\cos(x)$.

**Exercice 8** Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que la fonction $G(x) := \int_0^{g(x)} f(t)dt$ est dérivable et admet pour dérivée $G'(x) = g'(x)f(g(x))$.
2. On définit la fonction :
$$F(x) = \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t})dt + \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t})dt$$
Déterminer son domaine de définition et sa parité. Montrer que cette fonction est périodique et identifier la période.
3. Montrer que $F$ est dérivable et calculer sa dérivée.
4. Calculer $F(0)$ (on pourra effectuer le changement de variable $u = \arccos(\sqrt{t})$). En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 9**

1. Calculer la valeur de l'intégrale :
$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\left[2-\sin^2(t)\right]^2}dt$$
(indication : on pourra utiliser le changement de variable $x = \cos(t)$).
2. On définit les intégrales (pour $n \geqslant 1$) :
$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(t)}{\left[(2-\sin^2(t)\right]^2}dt$$
Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $I_{n+1} \leqslant I_n$.

**Exercice 10** Effectuer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle suivante :

$$f(t) = \frac{5}{(t-2)(t-1)^2(t^2+1)}$$

En déduire une primitive de $f$.

**Exercice 11** On se propose de calculer une primitive de :

$$f(x) = \frac{[\cos(x)+1]^3}{\sin(x)[2+\sin(x)][\cos(x)+\sin(x)+1]^2}$$

1. Effectuer un changement de variables ramenant le calcul d'une primitive de $f$ au calcul d'une primitive de fraction rationnelle.
2. Décomposer la fraction rationnelle obtenue en éléments simples.
3. Calculer une primitive de $(t^2+t+1)^{-1}$.
4. En déduire une primitive de $f$.

**Exercice 12** On définit l'intégrale suivante :

$$J(X) = \int_0^X \sqrt{\frac{t}{t+1}}\frac{1}{2t^2+2t+1}dt$$

1. Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme $X^4+1$.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :
$$f(X) = \frac{X^2}{X^4+1}$$
3. En déduire une primitive de $f$.
4. A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{t}{t+1}}$, calculer $J(X)$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} J(X)$.

**Exercice 13** En utilisant les propriétés des intégrales montrer les énoncés suivants.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de période $T$ (c'est-à-dire que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt$$
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue impaire, montrer que $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue paire, montrer que $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, calculer $F(a) = \displaystyle\int_{-a}^a tf(t^2)dt$.

**Exercice 14** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^3 \left(5t^2+3t-5+\frac{1}{t^3}\right)dt$.
2. $\displaystyle\int_0^\pi \cos^4(x)dx$.
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^3(x)dx$.
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2(x)dx$.
5. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin^3(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log^5(x)}{x}dx$.

**Exercice 15** Montrer que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$$

**Exercice 16** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \log x dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \log x dx.$
2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \cos(x) dx := \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-x} \cos(x) dx.$