Théorie de Galois (M1-2015), feuille d'exercices 1

September 6, 2015

Exercice 1. (Révisions sur les corps)

On se donne un corps K.

1) Montrer que tous ses idéaux propres (différents de K) sont triviaux.

2) Montrer qu'un morphisme de corps $\phi : K \to L$ est ou bien nul, ou bien injectif; dans le deuxième cas on montrera que $\phi(1_K) = 1_L$.

3) Donner un exemple de morphisme injectif de corps $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

4) Déterminer si les quotients suivants sont des corps:

$$\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 1), \mathbb{Q}[X]/(X^2 + 4).$$

Soit A un anneau. S'il existe un entier n non nul tel que $\forall a \in A$, $na = 0$, on appelle la caractéristique de A le plus petit entier $p > 0$ tel que $\forall a \in A$, $pa = 0$. S'il n'existe pas de tel n, on dit que la caractéristique de A est0 . On note $car(A)$ la caractéristique de A.

5) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux:

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{Z} \to A \\ 1 \mapsto 1_A. \end{cases}$$

6) En déduire qu'il existe un entier p tel que $Ker(\psi) = p.\mathbb{Z}$.

7) Montrer que $car(A) = p$.

8) Montrer que si A est intègre et si la caractéristique de A est non nulle alors p est premier.

9) Quelle est la caractéristique de

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n, \mathbb{C}.$$

10) Soit K un corps à q éléments et de caractéristique p. Montrer que p est un nombre premier et que q est une puissance de p.

11) Soit A un anneau de caractéristique $p \neq 0$, montrer que l'application

$$F : \begin{cases} A \to A \\ a \mapsto a^p \end{cases}$$

est un morphisme d'anneau.

12) Le nombre 2 est-il un carré dans $\mathbb{F}_5$? Montrer que $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_5[X]$.

13) Montrer que le quotient

$$\mathbb{F}_5[X]/(X^2 + X + 1)$$

est un corps à 25 éléments et que l'équation $Y^2 + Y + 1 = 0$ a deux racines dans ce corps.

Exercice 2. (Polynômes symétriques)

1) Ecrire les polynômes symétriques suivants en fonction des polynôme symétriques élémentaires

$$X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2; X^3Y + X^3Z + XY^3 + XZ^3 + Y^3Z + YZ^3$$

2) Calculer à l'aide des formules de Newton la somme des puissances quatrièmes des racines de

$$(X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4).$$

3) Déterminer le polyôlme unitaire dont les racines sont les inverses des carrés des racines du polynôme

$$X^3 + pX + q, q \neq 0.$$

Exercice 3. (résultant et discriminant)

1) Soient P, Q et R trois polnômes vérifier:

$$rés(P, QR) = rés(P, Q)rés(P, R).$$

2) Calculer de diverses manières $rés(aX^2 + bX + c, dX + e)$.

3) Calculer $D(aX^2 + bX + c)$, $D(X^3 + pX + q)$.

4) On suppose que l'on a

$$P(X) = a\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

montrer que $D(P) = a^{2n-2}\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i - x_j)^2$.

5) On suppose que P est un polynôme à coefficients réels à racines distinctes deux à deux. Que peut-on dire du signe de $D(P)$ et du nombre de racines réelles?

6) On peut munir l'espace $\mathbb{C}[X]_n$ des polynômes de degré n de la topologie héritée de la struture de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Montrer que les polynômes à racines simples forment un ouvert de cet espace. En déduire que les matrices $n \times n$ dont les valeurs propres sont distinctes forment un ouvert de l'espace $M_n(\mathbb{C})$.