Théorie de Galois (M1-2015), feuille d'exercices 2

October 11, 2015

Exercice 1. (Factorisation de polynômes)

1. Étudier l'irréductibilité de X^6+3 dans $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{Q}[j][X]$, $\mathbb{Q}[i][X]$ (il faut un minimum de connaissances sur les anneaux factoriels pour traiter rapidement l'irréductibilité sur le dernier anneau).

2. Étudier l'irréductibilité de X^4+1 dans $\mathbb{Q}[X]$ (on pourra changer X en $X+1$). Factoriser X^4+1 en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[\zeta][X]$, où ζ est une racine de ce polynôme.

Exercice 2. (Degré d'extensions algébriques)

1. Soit L une extension algébrique de K et soient a et b deux éléments de L. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

   (a) Si $[\mathbb{K}(a):\mathbb{K}]=2$ et $[\mathbb{K}(b):\mathbb{K}]=2$, alors $[\mathbb{K}(a,b):\mathbb{K}]=4$.
   (b) Si $[\mathbb{K}(a):\mathbb{K}]=2$ et $[\mathbb{K}(b):\mathbb{K}]=3$, alors $[\mathbb{K}(a,b):\mathbb{K}]=6$.
   (c) Si $[\mathbb{L}:\mathbb{K}]=2^n$, alors $[\mathbb{K}(a):\mathbb{K}]$ est une puissance de 2.
   (d) $[\mathbb{K}(a,b):\mathbb{K}(a)]$ divise $[\mathbb{K}(b):\mathbb{K}]$.

2. Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension de corps, soit $\alpha\in\mathbb{L}$ et soit $P\in\mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n irréductible sur $\mathbb{K}$.

   (a) Calculer $[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{K}]$ lorsque $\alpha\notin\mathbb{K}$ et $\alpha^2\in\mathbb{K}$.
   (b) Calculer $[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{K}]$ lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ et $\alpha=3+\sqrt{2}$.
   (c) Calculer $[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{K}]$ lorsque α est racine de P.
   (d) Quel est le nombre maximal de racines de P dans $\mathbb{K}$? dans $\mathbb{L}$?
   (e) Donner un majorant de $[\mathbb{L}:\mathbb{K}]$ lorque $\mathbb{L}$ est un corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}$.
   (f) Que signifie le fait que $[\mathbb{L}:\mathbb{K}]=n$ lorque L est un corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}$?

3. Dans cet exercice P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{L}$ désigne le corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$ contenu dans $\mathbb{C}$. Calculer $[\mathbb{L}:\mathbb{Q}]$ dans les cas suivants :

   (a) $P=X^3-1$.
   (b) $P=X^4+5X^2+6$.
   (c) $P=X^6-8$.

4. Calculer $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}):\mathbb{Q}]$.

Exercice 3. (Calculs dans une extension algébrique)

1. On considére le polynôme $P(X) = X^3 + 2X + 2$ de $\mathbb{Q}[X]$ et on note α une racine de P.
   (a) Montrer que P est irréductible.
   (b) Exprimer les éléments $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha^2+\alpha+1}$ et $u = \alpha^6 + 3\alpha^4 + 2\alpha^3 + 6\alpha$ en fonction de 1, α, α^2.
   (c) Déterminer le polynôme minimal de u sur $\mathbb{Q}$.
2. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
   (a) Quel est le polynôme minimal P de ω sur $\mathbb{Q}$?
   (b) Démontrer que $2cos\frac{2\pi}{5} = \omega + \frac{1}{\omega}$ est racine du polynôme $X^2 + X - 1$.
   (c) Donner la factorisation de P en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.
   (d) Quel est le polynôme minimal de ω sur $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$?
3. Soient $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $\beta = 2^{\frac{1}{5}}$ dans $\mathbb{C}$.
   (a) Calculer le polynôme minimal P_α de α sur $\mathbb{Q}$, puis celui P_β de β sur $\mathbb{Q}$. En déduire les valeurs de $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ et de $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$.
   (b) Montrer que $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \times [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$ et que $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$.
   (c) Le polynôme P_α est-il irréductible sur $\mathbb{Q}(\beta)$?
4. Soient $a = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$, $b = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[a]$.
   (a) Trouver un polynôme unitaire $P \in \mathbb{Q}[X]$ dont a soit racine.
   (b) Vérifier que P est le polynôme minimal de a sur $\mathbb{Q}$.
   (c) Que vaut $[K : \mathbb{Q}]$ et quelles sont les racines de P dans $\mathbb{C}$? Donner une base de K sur $\mathbb{Q}$.
   (d) Vérifier que $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] \subset K$ et montrer que $b \in K$.
   (e) Calculer $a + b$ et ab, puis montrer que $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$.

Exercice 4. (Extensions algébriques)

1. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?
   (a) $\mathbb{C}$ n'a pas d'extensions algébriques.
   (b) Si $\mathbb{K}$ est une extension de degré fini de $\mathbb{R}$, alors $[\mathbb{K} : \mathbb{R}] = 1$ ou 2.
   (c) $\mathbb{Q}$ a des extensions de degré n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) $i \in \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$.
   (e) Tout corps fini de caractéristique p est une extension algébrique de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
2. Soit $\mathbb{K}$ un corps, $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré 3 irréductible sur $\mathbb{K}$ et soient α, β et γ les racines de P dans un corps de décomposition $\mathbb{L}$ de P sur $\mathbb{K}$. L'assertion suivante est-elle vraie :
$$\alpha \in K(\beta) \Leftrightarrow \beta \in K(\gamma)\,?$$
3. Soit $\mathbb{L}$ une extension algébrique de $\mathbb{Q}$.
   (a) Montrer que s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{L}$, on ait $[\mathbb{Q}[x] : \mathbb{Q}] \leq n$, alors on a $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}] \leq n$.
   (b) Montrer que s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{L}$, $[\mathbb{Q}[x] : \mathbb{Q}]$ divise n, alors $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$ divise n.
4. Montrer que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ne sont pas isomorphes.