Théorie de Galois (M1-2015), feuille d'exercices 3

October 14, 2015

Exercice 1. (K-homomorphismes)

1. Déterminer des $\mathbb{Q}$-automorphismes de $\mathbb{Q}[7+3i]$, et de $\mathbb{Q}[\alpha]$, où α est une racne de X^2+52.
2. Déterminer tous les sous-corps de $\mathbb{C}$ qui sont $\mathbb{Q}$-isomorphes à $\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$, à $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{15}\right]$, à $\mathbb{Q}\left[\sqrt[5]{3}\right]$ et à $\mathbb{Q}\left[\sqrt[6]{3}\right]$.
3. (a) Déterminer les $\mathbb{Q}$-automorphismes de $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$, de $\mathbb{Q}\left[\sqrt[4]{2}\right]$ et de $\mathbb{Q}\left[\sqrt[8]{2}\right]$.
   (b) Montrer que $\bigcup_{1\leq n} \mathbb{Q}\left[\sqrt[n]{2}\right]$ est une extension de $\mathbb{Q}$ de degré non fini. Déterminer ses $\mathbb{Q}$-automorphismes.

Exercice 2. (Élément primitif)

1. Soient $K \subset \mathbb{C}$ un corps, a et b deux éléments de K. Montrer que si $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est non nul, c'est un élément primitif de $K\left[\sqrt{a}, \sqrt{b}\right]$.
2. Montrer que $j\sqrt{5}$ est un élément primitif de $\mathbb{Q}\left[j, \sqrt{5}\right]$.
3. Soit l'extension $K = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}\right]$ de $\mathbb{Q}$.
   (a) Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ est un élément primitif de K.
   (b) Déterminer les $\mathbb{Q}$-automorphismes de K.
   (c) Donner les autres éléments primitifs de cette extension.

Exercice 3. (Extensions normales)

1. Montrer qu'une extension de degré 2 d'un corps K est normale.
2. Soient $N \subset \mathbb{C}$ une extension normale de degré fini d'un corps K, L une extension de K et $N' \subset \mathbb{C}$ l'extension de K engendrée par $L \cup N$. Montrer que N' est une extension normale de L.
3. Soient a, b, c les racines de $X^3 - 3X + 1$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{Q}[a]$ est une extension normale de $\mathbb{Q}$ et exprimer b et c dans la base $\{1, a, a^2\}$.

Exercice 4. (Calculs de groupes de Galois)

Por chacun des polynômes P de degré n suivants, déterminer:

- le groupe de Galois du corps de décomposition N de P sur $\mathbb{Q}$;
- la correspondance etre sous-groupes de G et sous-extensions de N;
- la factorisation de P sur chacune des extensions intermédiaires;
- un sous-groupe de S_n isomporphe à G, en numérotant les racines.

1. $X^2 - 2$;
2. $(X^2 - 2)(X^2 - 3)$;
3. $X^3 - 1$;
4. $X^3 + 2$;
5. $X^4 + 1$;
6. $X^4 - 1$.