Théorie de Galois (M1-2015), feuille d'exercices 4

November 10, 2015

Exercice 1. (Équations du troisième degré)

On considère le polynôme $P(X) = X^3 + pX + q$. On note a, b, c ses racines, D son discriminant, d un nombre complexe tel que $d^2 = D$, $K = \mathbb{Q}(p,q)$ et $G = \mathrm{Gal}(K(a,b,c)|K)$.

1. On suppose P réductible sur K. Quelles sont les structures possibles de G? Les préciser en fonction de d.

2. On suppose P irréductible sur K. Quelles sont les structures possibles de G? Préciser le extensions intermédiaires entre K et $K(a,b,c)$.
(Indication: Distinguer le cas où $d \in K$ et celui où $d \notin K$).

3. Déterminer les groupes de Galois de:

   (a) $X^3 - 2X - 1$ sur $\mathbb{Q}$, sur $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
   (b) $X^3 - 3X + 1$ sur $\mathbb{Q}$.
   (c) $X^3 - 4X + 1$ sur $\mathbb{Q}$.
   (d) $X^3 - 2X + 2$ sur $\mathbb{Q}$, sur $\mathbb{Q}(i\sqrt{19})$.
   (e) $X^3 - 5$ sur $\mathbb{Q}$, sur $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$, sur $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$.

Exercice 2. (Extensions biquadratiques)

Les différents corps considérés sont intermédiaires entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$.

On appelle extension biquadratique d'un corps K une extension algébrique L de degré 4 de K telle qu'il existe a et b dans K tels que $L = K(\sqrt{a}, \sqrt{b})$.

1. (a) Montrer que toute extension biquadratique N d'un corps K est normale; préciser son groupe de Galois G et la correspondance de Galois etre sous-groupes de G et extensions intermédiaires etre K et N.
   (b) Soit N une extension normale de degré 4 d'un corps K telle que $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que N est une extension biquadratique de K.

2. On pose $\alpha = \sqrt{6 + \sqrt{11}}$, $\beta = \sqrt{6 - \sqrt{11}}$ et $N = \mathbb{Q}(\alpha)$.

   (a) Déterminer le polynôme minimal P de α sur $\mathbb{Q}$.
   (b) Comparer $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$ et N. Montrer que β est dans N et donner son expression dans la base $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$.
   (c) Montrer que N est une extension normale de degré 4 de $\mathbb{Q}$.
   (d) On pose $G = \mathrm{Gal}(N|\mathbb{Q})$. Quelle est la structure de G?
   (e) Quels sont les degrés de $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ sur $\mathbb{Q}$? En déduire que α et β s'écrivent sous la forme $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ avec a et b dans $\mathbb{Q}$ qu'on calculera.
   (f) Donner le treillis des extensions intermédiaires entre $\mathbb{Q}$ et N.

Exercice 3. (Clôture normale de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})$)

On pose $P(X) = X^3 + 3X - 2$, $u = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ et $v = \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$, les racines cubiques étant prises dans $\mathbb{R}$. On note D le discriminant de P, d le nombre de partie imaginaire positive tel que $d^2 = D$ et N la clôture normale de $\mathbb{Q}(u)$ sur $\mathbb{Q}$.

1. Déterminer le nombre de racines réelles de P. On note c, a, b les racines de P de partie imaginaire négative, nulle, positive respectivement. Déterminer a, b, c.
2. Soit G le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(a,b,c)|\mathbb{Q})$. Déterminer la structure de G.
3. Quel est le degré de u sur $\mathbb{Q}$?
4. Montrer que $N = \mathbb{Q}(u, j)$.
5. Donner des exemples d'extensions intermédiaires distinctes et non triviales entre $\mathbb{Q}$ et N.
6. On note G' le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(N|\mathbb{Q})$. Déterminer l'ordre de G'.
7. On note $\sigma, \tau : N \to N$ les élements de G' tels que $\sigma(u) = u$ et $\sigma(j) = j^2$ et $\tau(u) = jv$ et $\tau(j) = j^2$. Quels sont les ordres de σ et τ? Montrer que σ et τ engendrent G'. Calculer $\tau(\sqrt{2})$, $\sigma(d)$ et $\tau(d)$.
8. Quelle est la structure de G'?
9. Quel est le sous-groupe de G' laissant $\mathbb{Q}(u)$ invaritant? Est-il distingué dans G'?
10. Déterminer les extensions invariantes par les groupes $\langle \sigma, \tau^2 \rangle$, $\langle \tau\sigma, \tau^2 \rangle$, $\langle \tau \rangle$.
11. Préciser la correspondance de Galois entre sous-groupes de G' et extensions intermédiaires entre $\mathbb{Q}$ et N.

Exercice 4. (Groupe de Galois décomposable en produit direct)

1. Soient K un corps, N une extension normale de K, L' et L'' des extensions de K contenues dans N, $G = \mathrm{Gal}(N|K)$, $G' = \mathrm{Gal}(N|L')$ et $G'' = \mathrm{Gal}(N|L'')$. Montrer que si L' et L'' sont des extensions normales de K telles que $L' \cup L''$ engendre N et $L' \cap L'' = K$, G est le produit direct de ses sous-groupes G' et G'', autrement dit $G \simeq G' \times G''$.
2. Montrer la réciproque: si K est un corps, N une extension normale de K, si $G = \mathrm{Gal}(N|K)$ est un produit direct de deux de ses sous-groupes G' et G'' et si $L' = I(G')$ et $L'' = I(G'')$ on a : $L' \cup L''$ engendre N et $L' \cap L'' = K$.
3. Montrer que, dans les conditions de la première question, on a:
$$\mathrm{Gal}(N|K) \simeq \mathrm{Gal}(L'|K) \times \mathrm{Gal}(L''|K).$$
4. Déterminer le groupe de Galois de $X^5 - 9X + 3$ sur $\mathbb{Q}$.
(Indication: Utiliser l'exercice 1.)