Théorie de Galois (M1-2015), feuille d'exercices 5

November 25, 2015

Exerice 1. Extensions cycliques et abéliennes

1. Soit N une extension abélienne d'un corps K. Montrer que toute extension intermédiaire L est une extension abélienne de K.

2. Donner un exemple extension abélienne non cyclique de $\mathbb{Q}$.

3. Déterminer le corps de décomposition N du polynôme $X^6 - 2$ sur $\mathbb{Q}(j)$. Décrire les éléments du groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(N|\mathbb{Q}(j))$ et déterminer la structure de G.

Exerice 2. Extensions cycliques sans le théorème 90 de Hilbert

Soit K un corps contenu dans $\mathbb{C}$. Un polynôme P de $K[X]$ est dit scindè s'il est produit de facteurs du premier degré dans $K[X]$. On rappelle qu'un endomorphisme f de K-espace vectoriel tel qu'il existe un polymôme P de $K[X]$ scindè, à racines simples et tel que $P(f) = 0$, est diagonalisable.

1. Soient $n \geq 1$ un entier, ζ une racine primitive n-ième de l'unité, K un corps contenant ζ, L une extension cyclique de K de degré n, de groupe de Galois G de générateur σ. On considère σ comme un endomorphisme du K-espace vectoriel L.
   (a) Montrer que le valeurs propres de σ sont des racines n-ièmes de l'unité et que 1 est valeur propre de σ.
   (b) Montrer que σ est diagonalisable.
   (c) En déduire que 1 ne peut être la seule valeur propre de σ.
   (d) Montrer que les valeur propres de σ forment un groupe cyclique égal au groupe μ_n des racines n-ièmes de l'unité.
   (e) Montrer qu'il existe a dans K, b dans L tels que $b^n = a$ et $L = K(b)$.

2. Soit $P(X) = X^3 + pX + q$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ irréductible sur $K = \mathbb{Q}(p,q)$, a, b, c ses recines dans $\mathbb{C}$, d une racine carrée de son discriminant, $L = K(j, d)$, $N = L(a, b, c)$.
   (a) Montrer que $\{1, a, b\}$ est une base de N sur L.
   (b) Montrer que $G = \mathrm{Gal}(N|L)$ est cyclique.
   (c) Soit σ un génerateur de G. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de σ.
   (d) Vérifier qu'on a retrouve bien les résolvantes de Lagrange.

Exerice 3. Norme comme déterminant

Soient $L \subset \mathbb{C}$ une extension normale d'un corps K, a un élément de L, $P(X) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k X^k$ le polynôme minimal de a sur K et L' la clôture normale de $K(a)$ dans L. On note $m : L \to L$ l'application définie par $m(x) = ax$ et on pose $m' = m|L'$.

1. Vérifier que m est K-linéaire.

2. (a) Exprimer $N_{L'/K}(a)$ en fonction des coefficients de P.
   (b) Montrer que $N_{L'/K}(a)$=dét (m').

3. En déduire que $N_{L/K}(a)$=dét (m).