Université de Picardie Jules Verne
Département de Mathématiques

2015–2016
L1 Outils Maths

Feuille d'exercices 1.

1. Généralités sur les fonctions

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f se décompose de manière unique sous la forme $f = g + h$ où g est une fonction paire et h une fonction impaire. On exprimera $g(t)$ et $h(t)$ à l'aide de $f(t)$ et $f(-t)$.
g est appelée la *partie paire* de f, h est appelée la *partie impaire* de f

Exercice 2. Décider les fonctions suivantes sont paires, impaires, injectives, surjectives, bijectives. Pour les fonctions injectives calculer l'ensemble image et la fonction réciproque correspondante.

$$\begin{array}{llll}
f : [0,1] \to [0,1], & f(x) = 1 - x\,; & g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & g(x) = e^x\,; \\
h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & h(x) = (\sin x)^2\,; & i : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, & i(x) = \cos x\,; \\
j : [1, \infty] \to \mathbb{R}, & j(x) = \dfrac{1}{x}\,; & k : [-1,1] \to [-1,0], & k(x) = x^2 - 1\,.
\end{array}$$

Exercice 3. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll}
f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}\,; & g(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}\,; & h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x - 1}}\,; \\
i(x) = \sqrt{3x + 2} - \dfrac{1}{3 - x}\,; & j(x) = \sqrt{\dfrac{2x - 1}{x + 3}}\,; & k(x) = \sqrt{\sqrt{16 + x^2} - 5}\,.
\end{array}$$

Exercice 4. Préciser le domaine de définition et calculer la dérivée des fonctions suivantes. Vérifier s'il y a des modifications dans le domaine de définition de ces dérivées.

$$\begin{array}{lll}
f(x) = -2x^3 + 4x^2 + 6x - 3\,; & g(x) = (x^2 - x + 2)^4\,; & h(x) = (2x - 3)^2(-x + 2)\,; \\
i(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}\,; & j(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + x - 2}\,; & k(x) = \sqrt{\dfrac{x - 3}{x - 2}}\,; \\
l(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)\,; & m(x) = \ln\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)\,; & n(x) = e^{-x^3 + 2x}\,; \\
 & o(x) = (x + 1)e^{-x}\,. &
\end{array}$$

2. Fonctions logarithmiques et exponentielles. Applications

Exercice 5. a) Rappeler la formule liant le pH et la concentration en ions H_3O^+ d'une solution.
b) Calculer le pH d'une solution dont la concentration en ions H_3O^+ est égale à 42.10^{-8} mol.L^{-1}.
c) Quelle est la concentration en ions H_3O^+ d'une solution dont le pH est égal à 12,7 ?

Exercice 6. Un haut-parleur d'une puissance de Q watts disposé à une distance de R mètres d'un observateur développe une puissance acoustique de $J = Q/(4\pi R^2)$ $W.m^{-2}$. L'intensité d'un son en décibels est donnée par la formule :

$$I = 10 \log_{10}\left(\frac{J}{J_0}\right) \text{ dB},$$

$J_0 = 10^{-12}$ $W.m^{-2}$ est la plus faible puissance audible par un être humain à une fréquence de 1kHz.
a) La limite de la douleur pour un individu est estimée à 120 dB. Déterminer la distance à laquelle cette limite est atteinte lorsque $Q = 200W$. De même déterminer la distance à laquelle le son perçu a l'intensité d'un chuchotement (20 dB).
b) Si l'individu est situé à 2 mètres de la source, déterminer la puissance Q nécessaire pour atteindre la limite de la douleur.

Exercice 7. Le nombre de bactéries $N(t)$ que renferme une culture au temps t est donné par :

$$N(t) = N_0 e^{\beta t}$$

où N_0 est le nombre initial de bactéries et β est un coefficient dépendant du type de bactéries et du milieu ambiant. On a estimé le nombre de bactéries d'une culture à 200000 après 3 jours et à 1600000 après 4.5 jours.
a) Quel est le nombre de bactéries après 5 jours ?
b) Quand la culture contient-elle 800000 bactéries ?

Exercice 8. Une dose $D = 250$ mg d'un médicament est administré par voie intraveineuse. Ce médicament s'élimine avec un coefficient $k_e = 0,3$ h^{-1}, et la quantité (en mg) présente à l'instant t dans le sang est de la forme $A(t) = De^{-k_e t} = 250e^{-0,3t}$. Sachant que le médicament n'est efficace que si une quantité d'au moins 40 mg est présente dans le sang, au bout de combien de temps faut-il renouveler l'administration ?

3. Fonctions hyperboliques

Exercice 9. Ce sont les deux fonctions définies par les formules :

$$\boxed{\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}}.$$

(1) Préciser la parité de ch et de sh, ainsi que de la somme ch$t$ + sh$t$. Que peut-on dire de la somme en utilisant Exercice 1 de cette feuille d'exercices ?

(2) Calculer les dérivées $\operatorname{ch}' t$ et $\operatorname{sh}' t$.
Montrer que ch et sh sont solutions d'une même équation différentielle exprimant la dérivée seconde y'' à l'aide de la fonction y.

(3) Préciser successivement sur un même tableau, contenant zéro comme valeur particulière : le signe de ch, les variations de sh, le signe de sh et les variations de ch.
On y indiquera les limites en $\pm\infty$ des fonctions ch et sh.

(4) Préciser les ensembles images $\operatorname{ch}(\mathbb{R})$, $\operatorname{sh}(\mathbb{R})$, $\operatorname{ch}([-1, 1])$.
Quelle est la plus petite valeur possible de $\operatorname{ch} t$?

(5) Indiquer en fonction de $y \in \mathbb{R}$ le nombre n_y de solutions à l'équation $\operatorname{ch} x = y$.

(6) Déterminer les limites en $\pm\infty$ de $\dfrac{\operatorname{ch} t}{t}$ et $\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$. Que peut-on en déduire pour les courbes des fonctions ch et sh ?

(7) Préciser, suivant le signe de x les positions relatives des trois nombres $\dfrac{e^x}{2}$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.

(8) Représenter sur un même graphique les courbes $y = \dfrac{e^x}{2}$, $\Gamma : y = \operatorname{ch} x$, $\Gamma' : t = \operatorname{sh} x$, ainsi que les tangentes à Γ et à Γ' en $x = 0$.

(9) Déterminer les intervalles de convexité, de concavité, ainsi que les points d'inflexions, des fonctions ch et sh.

La fin de cette section suppose connu l'exercice précédent.

Exercice 10. La tangente hyperbolique de t est définie par $\boxed{\operatorname{th} t = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}}$.

(1) Préciser le domaine de définition de th.

(2) Montrer que th est solution de l'équation différentielle $y' = 1 - y^2$.

(3) Déterminer le tableau des variations de la fonction th, incluant ses limites aux bornes.

(4) Montrer que la fonction th induit une bijection entre $\mathbb{R}$ et un intervalle J qu'on précisera. La bijection réciproque est notée argth : $J \to \mathbb{R}$.

(5) Représenter sur un même graphique les courbes $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{argth} x$, ainsi que leurs tangentes en $x = 0$.

(6) Calculer $\operatorname{argth}' x$ en fonction de x, à l'aide de la question 2.

(7) Calculer $\operatorname{argth} t$ en fonction de $t \in]-1, 1[$.

Exercice 11.

(1) Expliquer pourquoi sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.
Soit argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(2) Tracer sur un même graphique les courbes de sh et de argsh.

(3) Calculer $\operatorname{argsh} t$ en fonction de t.

(4) Vérifier que $(\operatorname{ch} t)^2 - (\operatorname{sh} t)^2$ est une constante qu'on précisera.

(5) En déduire une expression de sh' en fonction de sh, et ensuite une expression de $\operatorname{argsh}' t$.

(6) Expliquer pourquoi ch définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle I qu'on précisera. argch : $I \to \mathbb{R}_+$ est la bijection réciproque de ch : $\mathbb{R}_+ \to I$.

(7) Tracer sur un même graphique les courbes de ch et de argch.

(8) Calculer $\operatorname{argch} t$ en fonction de $t \geq 1$.

(9) Déduire de 4 une expression de ch' en fonction de ch, et ensuite une expression de $\operatorname{argch}' t$.

Exercice 12. Calculer, pour $s, t \in \mathbb{R}$, les nombres $\operatorname{ch}(s+t)$ et $\operatorname{sh}(s+t)$ à l'aide des deux nombres $\operatorname{ch} t$ et $\operatorname{sh} t$.