Université de Picardie Jules Verne
Département de Mathématiques 2015–2016
L1 Outils Maths

Feuille d'exercices 2.

1. Opérations sur les limites.

Exercice 1. Déterminer la convergence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

(1) $\lim_{t\to\pm\infty} t + e^t$

(2) $\lim_{t\to\pm\infty} \ln(1+t^2)$

(3) $\lim_{t\to\pm\infty} e^{\frac{1}{t}} + e^{1+\frac{1}{t}} - \ln\left(1 - \frac{1}{t^3}\right) + \ln\left(e^2 + \frac{3}{t^4}\right)$

(4) $\lim_{t\to\pm\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{t}\right)$

(5) $\lim_{t\to\pm\infty} e^{-\ \ln^3(1+t^2)}$

(6) $\lim_{t\to 0+} te^{\frac{1}{t}}$

(7) $\lim_{t\to\pm\infty} t\sin\left(\frac{1}{t}\right)$

(8) $\lim_{t\to\pm\infty} e^{1-t^2}$

Exercice 2. Déterminer la convergence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

(1) $\lim_{t\to\pm\infty} t^5 - t^2 + 1$

(2) $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{2t^3 - 3t^2 + 1}{4t^3 - 1}$

(3) $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{2t^5 - 3t^2 + 1}{5t^3 + 1}$

(4) $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{t^3 + 4t^2 + 1}{4t^7 - (1+t)^5}$

(5) $\lim_{t\to+\infty} e^t - t^5 + \ln t$ (aussi en 0)

(6) $\lim_{t\to+\infty} 5e^t - t^5 - (\ln t)^2$ (aussi en 0)

(7) $\lim_{t\to+\infty} \frac{3t^9 - (1,02)^t + 2\ln t}{\ln t - \sqrt{t} + \arctan t}$ (aussi en 0)

(8) $\lim_{t\to 0^+} \ln(t) + \frac{1}{t}$ (aussi en $+\infty$)

(9) $\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t) + \frac{1}{t}}{\ln(t) - \frac{1}{t}}$ (aussi en $+\infty$)

(10) $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{\sqrt{t}\ln(t)+\cos t}{4t^3-1}$ (aussi en $+\infty$)

(11) $\lim_{t\to -\infty} \left(t+\dfrac{1}{t}\right)^4 e^t$ (aussi en $+\infty$, en 0)

(12) $\lim_{t\to O+} \sin\left(e^{t+\ln t}\right)$

(13) $\lim_{t\to\pm\infty} \dfrac{e^{1+t^2}}{(1+t^2)^5}$

(14) $\lim_{t\to\pm\infty} \dfrac{e^{1+t^2}}{4+t^9}$

(15) $\lim_{t\to O+} t^t$ (aussi en $+\infty$)

(16) $\lim_{t\to +\infty} t^t-(100)^{9t}+t$ (aussi en 0)

(17) $\lim_{t\to +\infty} t^t-e^{1+t^2}$ (aussi en 0)

(18) $\lim_{t\to\pm\infty} t+\ln(1+t^2)$

Exercice 3. Rappeler les valeurs de $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}$ et de $\lim_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}$ et déterminer la convergence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

(1) $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin 2t}{t}$

(2) $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin 2t}{\sin 3t}$

(3) $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin(t^2)}{t\sqrt{t}}$

(4) $\lim_{t\to 0}\dfrac{2t^3-3t^2}{\sin^2 t}$

(5) $\lim_{t\to 0}\dfrac{t\sin(2t)}{\ln(1+t^2)}$

(6) $\lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{a}{n})^n$ (pour $a\in\mathbb{R}$)

Exercice 4 (expression conjuguée)**.**
Étudier les limites suivantes :

(1) $\lim_{t\to +\infty}\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}$

(2) $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$

(3) $\lim_{t\to\pm\infty}\sqrt{t^2+3t+1}-\sqrt{t^2+t+1}$

2. Comparaison, encadrement.

Exercice 5. Déterminer la convergence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

(1) $\lim_{t\to+\infty} \sqrt{t} - \ln t + \sin t$

(2) $\lim_{t\to+\infty} t^2 + t\sin t$

(3) $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{\sin t}{\ln t}$

(4) $\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}\sin(\ln t)$

3. Comportement Asymptotique.

Exercice 6. Prouver que la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe de $f(t) = \sqrt{t^2+t+1}$.

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, déterminer le comportement asymptotique de la courbe représentative de f en $+\infty$ (et le cas échéant en $-\infty$).

(1) $f(t) = \dfrac{t}{1+2t}$

(2) $f(t) = \sqrt{t + \ln t}$

(3) $f(t) = t(1+t^2)$

(4) $f(t) = 2t + 3 + \dfrac{4}{t}$

(5) $f(t) = 2t + \ln(1+t^4)$

(6) $f(t) = 2t + \sqrt{t} + \sin t$

(7) $f(t) = 1 + 2t + \sqrt{t}\sin t$

(8) $f(t) = \dfrac{2t^3+3t^2+1}{t^2+1}$

4. Études de fonctions.

Exercice 8. Soit $f(t) = (t^2 - 2t + 2)e^t$.

(1) Déterminer $\lim_{t\to-\infty} f(t)$, $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{t}$; interpréter ces limites graphiquement.

(2) Calculer $f'(t)$.

(3) En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 t^2 e^t\,dt$.

(4) Préciser l'équation de la tangente $\mathcal{D}$ en $x = 0$ à la courbe $\mathcal{C}_f : y = f(x)$.

(5) Déterminer le tableau des variations de f.

(6) En déduire en fonction de $y \in \mathbb{R}$ le nombre n_y de solutions à l'équation $f(x) = y$.

(7) Calculer $f''(t)$ et étudier son signe.

(8) Préciser les intervalles de convexité ou de concavité de f ainsi que ses points d'inflexion.

(9) Donner l'allure de la courbe de f, on donne :
$e \simeq 2,7$; $f(-2) \simeq 1,4$; $f'(-2) \simeq 0,5$ et $f(-1) \simeq 1,8$.

Exercice 9. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x-2}$.

(1) Déterminer le domaine de définition D_f et le domaine de dérivabilité $D_{f'}$ de f.

(2) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x-2}$.

(3) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f. Préciser les éventuelles asymptotes.

(4) Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

(5) Représenter graphiquement la fonction f.

(6) Combien de solutions l'équation $f(x) = y$ possède-t-elle ? (discuter selon la valeur de y)

(7) préciser l'image du segment $[0, 3/2]$ par f.

Exercice 10. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$.

(1) Déterminer le domaine de définition D_f.

(2) Déterminer les limites $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{t}$, que peut-on en déduire pour le comportement asymptotique de C_f.

(3) Montrer qu'on peut prolonger par continuité f en zéro (ce qu'on fera dans la suite) et préciser la valeur $f(0)$.

(4) Prouver que $f'(0) = -\infty$. On utilisera la définition de la dérivée, ainsi que la limite $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{e^s - 1}{s}$. Que peut-on en déduire pour C_f ?

(5) Déterminer le domaine de dérivabilité $D_{f'}$ de f, et la valeur de $f'(t)$ pour $t > 0$.

(6) Préciser l'équation de la tangente $\mathcal{D}$ en $x = 1$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.

(7) Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

(8) préciser l'image du segment $[0, 1]$ par f, ainsi que $f(\mathbb{R}_+)$.

(9) Calculer $f''(t)$, pour $t > 0$, étudier son signe ainsi que la convexité de f sur $\mathbb{R}_+$.

(10) Représenter graphiquement la fonction f. On donne $1/e \simeq 0,37$ et $f(1/e) \simeq 0,7$.