Université de Picardie Jules Verne
Département de Mathématiques

2015–2016
L1 Outils Maths

Feuille d'exercices 3.

1. Études de fonctions.

Exercice 1. Soient $g(t) = t\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$ et $f(t) = \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t = e^{g(t)}$.

(1) Sachant qu'une population de microbes augmente de 1% toutes les heures, de quel pourcentage augmente-t-elle en 100 heures ? On donne $f(100) \simeq 2,705$.

(2) Déterminer les domaine de définition D_g et D_f.

(3) Déterminer les limites en zéro et en $+\infty$ de g et de f, que peut-on en déduire pour C_f ?

(4) Prouver que $g'(0) = +\infty = f'(0)$. On utilisera la définition de la dérivée, ainsi que la limite $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{e^s-1}{s}$. Que peut-on en déduire pour C_f ?

(5) Calculer pour $t > 0$, $g'(t)$ et $g''(t)$. Déterminer le signe de g'' ainsi que $\lim\limits_{t\to+\infty} g'(t)$. En déduire le signe de g' sur $\mathbb{R}_+^*$.

(6) En déduire le tableau des variations de g et de f.

(7) Préciser l'équation de la tangente $\mathcal{D}$ en $x = 1$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.

(8) Montrer que f'' a le signe de $g'^2 + g''$. En déduire à l'aide de la question 5, que $f''(t)$ a aussi le signe de $h(t) = g'(t) - \dfrac{1}{(t+1)\sqrt{t}}$.

(9) Préciser $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)$ et montrer que $h'(t)$ a le signe de $P(\sqrt{t})$ où on pose $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$.
En déduire les signe de h', de h et de f'' sur $\mathbb{R}_+^*$. Que peut on en déduire concernant la convexité de f ?

(10) Représenter graphiquement la fonction f. On donne $e \simeq 2,718$, $f(1/2) = \sqrt{3} \simeq 1,732$ et $\ln 2 \simeq 0,7$.

Exercice 2. Soit la fonction donnée par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.

(1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

(2) Vérifier pour tout $x \geq 2$ que $f(-1+x) = f(-1-x)$.
Quelle propriété de symétrie peut-on en déduire pour la courbe C_f de f ?

(3) Déterminer la limite de f aux bornes de D_f.

(4) Prouver que C_f admet des tangentes "verticales" en les points d'abscisses 1 et -3.

(5) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + (x+1)$.
Montrer que l'équation $f(x) = |x+1|$ n'admet aucune solution.
Interpréter graphiquement ces résultats.

(6) Calculer $f^{'}(x)$ pour tout $x \in D_{f'}$. Dresser le tableau de variation de f.

(7) Préciser l'équation de la tangente $\mathcal{D}$ en $x = 2$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.

(8) Montrer pour tout x de D_f que $f(x) \leq |x+1| \leq (x+1)^2$.
En déduire que f est concave sur chacun des intervalles de D_f.

(9) Représenter graphiquement la fonction f. On donne $\sqrt{5} \simeq 2,25$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ et C_f sa courbe représentative.

(1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
a) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.
b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
c) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$. Préciser les positions relatives de C_f et de Δ.

(2) Prouver que C_f admet des tangentes "verticales" en les points d'abscisses 1 et -1.

(3) Déterminer le domaine de dérivabilité $D_{f'}$ de f.

(4) a) Démontrer que pour tout $x > 1$, $f(x) > 0$.
b) Démontrer que pour tout $x < -1$, $f(x) < 0$.

(5) Calculer $f^{'}(x)$ pour tout $x \in D_{f'}$ et montrer que $f'(x)$ est du même signe que $f(x)$.
Dresser le tableau de variation de f.

(6) Prouver que f est concave sur chacun des intervalles de D_f.

(7) Représenter graphiquement (C_f). On donne $\sqrt{3} \simeq 1,73$.
Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

(8) Déduire de 1), 3) et 4) les domaines de définition de D_g et de dérivabilité $D_{g'}$ de g.

(9) Déduire de 2)b) la limite de g en $+\infty$.

(10) Démontrer que pour tout $x \in D_{g'}$, $g^{'}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

2. Questions diverses.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos x + \arcsin x$. Déterminer la valeur de $f'(x)$ lorsque $x \in]-1, 1[$, et en déduire la valeur de $f(x)$ lorsque $x \in [-1, 1]$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ et C_f sa courbe représentative.

(1) Prouver que $x > 0 \Rightarrow f(x) = \pi/2$.

(2) Quelle relation en déduit-on pour $x < 0$?

(3) Tracer le graphe C_f. La fonction f se prolonge-t-elle par continuité en zéro ?

Exercice 6. Rappeler les domaines de définition des trois fonctions argsh, argch et argth. Prouver que ces fonctions sont données, sur tout leur domaine de définition, par les formules :

$$\begin{aligned}\operatorname{argsh} t &= \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\\ \operatorname{argch} t &= \ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)\\ \operatorname{argth} t &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\end{aligned}$$

Exercice 7. Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^5+x+1=0$

Exercice 8. Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $x^9-x^2+x+1=0$.

Exercice 9. Déterminer le maximum et le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercice 10. Étudier et représenter graphiquement la fonction $f(x)=\arcsin(\operatorname{argsh} x)$.