Université de Picardie Jules Verne
Département de Mathématiques

2015–2016
L1 Outils Maths

Feuille d'exercices 5.

1. Calcul de primitives et intégrales.

Exercice 1. Calculer les **primitives** des fonctions suivantes :

(1) $f(t) = t\ln(t+2)$
(2) $f(t) = (t+2)\sin(t^2+4t-6)$
(3) $f(t) = t^3\cos t$
(4) $f(t) = t^n \ln t$ pour $n=-1$ et pour $n \neq -1$
(5) $f(t) = \sin(t)\sin(2t)$
(6) $f(t) = \sin^2 t$
(7) $f(t) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{1-t}}{2-t}\right)$
(8) $f(t) = (\cos t + \sin t)^4$
(9) $f(t) = \sin^2 t \cos t$
(10) $f(t) = \arcsin^2 t$ (et calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arcsin^2 t\, dt$).
(11) $f(t) = \arctan \sqrt[3]{t}$
(12) $f(t) = \sin^2 t\cos^2 t$
(13) $f(t) = \dfrac{t^2\ln t}{(t^3+1)^2}$

Exercice 2. Calculer les **intégrales** suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{t^2+t+1}{t^2+4}\, dt$$
$$B = \int_0^1 \frac{t^2+1}{(t+1)(t+2)}\, dt$$
$$C = \int_1^2 \frac{dt}{t^3+t}$$
$$D = \int_1^x (1+t^5)^3\, dt$$
$$E = \int_{-1}^0 \frac{t^3}{t^2+t-2}\, dt$$
$$F = \int_0^1 \frac{t^3+1}{t^2+t+1}\, dt$$

$$G = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$$
$$H = \int_0^1 \frac{t}{t^4+1}\,dt$$
$$I = \int_0^1 \frac{t}{t^4+t^2+1}\,dt$$
$$J = \int_0^1 te^t\,dt$$
$$K = \int_0^{2\pi} t^3 \sin t\,dt$$
$$L = \int_0^{2\pi} e^{2t} \sin t\,dt$$

Exercice 3. Calculer les primitives des fonctions suivantes, à l'aide d'une ou de plusieurs **intégrations par parties** :

(1) $f(t) = te^t$
(2) $f(t) = t^2 \cos t$
(3) $f(t) = t^2 \ln t$
(4) $f(t) = \ln t$
(5) $f(t) = \arctan t$
(6) $f(t) = \cos(t)\ln(1+\cos t)$
(7) $f(t) = e^{5t}(t^3 - 2t^2 + t - 4)$
(8) $f(t) = \ln(1+t^2)$

Exercice 4. Calculer les primitives des fonctions suivantes, à l'aide d'un**changement de variables**, parfois indiqué entre parenthèses :

(1) $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t+1}}$
(2) $f(t) = t(2t+5)^{10}$
(3) $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{e^t-1}}$ — $s = \sqrt{e^t-1}$
(4) $f(t) = \dfrac{1}{e^t+1}$
(5) $f(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt[3]{t+1}}$ — $s = \sqrt[3]{t+1}$
(6) $f(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$ — $t = \sin s$
(7) $f(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}$
(8) $f(t) = \ln\left(\sqrt[3]{t}-1\right)$
(9) $f(t) = \dfrac{1}{t\ln^\alpha t}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 5. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et vérifiant
$f(t) = f(a+b-t)$ pour tout $t \in [a,b]$.

(1) Montrer que $\displaystyle\int_a^b t f(t)\,dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,dt$.

(2) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$.

Exercice 6. Soit $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$.

(1) Montrer que $J_n = \dfrac{n-1}{n} J_{n-2}$.

(2) Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sin^2 t\,dt$.

Exercice 7. Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\sin t}+\sqrt{\cos t}}\,dt$.

(1) A l'aide du changement de variables $s = \dfrac{\pi}{2} - t$, montrer qu'on a aussi $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\sin t}+\sqrt{\cos t}}\,dt$.

(2) En déduire la valeur de I.

Exercice 8. Soit $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

(1) Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{(1-t)^2}\,dt$, pour $x \in]0,1[$.

(2) En déduire le signe de $g(x) = \dfrac{x}{1-x} + \ln(1-x)$, pour $x \in]0,1[$.

(3) Etudier les variations de f sur $]0,1[$.

(4) Peut-on prolonger par continuité f en zéro ?

Exercice 9. Soit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x^2-6x-27|}}$.

(1) Préciser les intervalles de $\mathbb{R}$ où f est définie.

(2) Déterminer une primitive de f sur chacun de ces intervalles.

(3) Déterminer une fonction F, continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la relation $F'(x) = f(x)$ en tout $x \in \mathrm{D}_f$.

Exercice 10. Calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{2+\sin t}\,dt$
(on posera $u = \tan\dfrac{t}{2}$).