Université de Picardie Jules Verne — 2015–2016
Département de Mathématiques — L1 Outils Maths

Feuille d'exercices 6.

1. Equations différentielles

Exercice 1. Intégrer les équations différentielles suivantes :

(1) : $y' + y\cos x = 0$;

(2) : $(1+x^2)y' + 4xy = 0$;

(3) : $x^n y' - \alpha y = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

On ne demande que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2. Intégrer les équations différentielles suivantes :

(1) : $y' - xe^x y = -xe^x$;

(2) : $(1+x^2)y' + (x-1)^2 y = x^3 - x^2 + x + 1$ (rechercher une solution affine) ;

(3) : $y' + 2y = e^x + x + 1$;

(4) : $y' + 2y = \sin x + \cos x$;

(5) : $y' - 2xy = (1-2x)e^x$.

On pourra exprimer la solution générale à l'aide de la condition initiale y_0 en zéro.

Exercice 3. Intégrer les équations différentielles suivantes :

(1) : $y' = e^{x+y}$;

(2) : $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$.

Exercice 4. De quelle équation différentielle la fonction $u = y^2$ est-elle solution lorsque y est solution de

$$(E) : yy' + \frac{1}{2} = 0\,?$$

Résoudre (E).

Exercice 5. Les équations différentielles suivantes admettent-elles des solutions sur $\mathbb{R}$:

(1) : $xy' + y = x^2$;

(2) : $(1-x^2)y' + xy = ax$, a est un paramètre réel ;

(3) : $(x+1)y' + xy = xe^{-x}$;

(4) : $xy' - y = \dfrac{-2x-1}{(x+1)^2}$;

(5) : $(\cos x)y' + (\sin x)y = x$.

Exercice 6. On reprend l'équation 4 de l'exercice 5. Montrer que les courbes intégrales sont des hyperboles dont on donnera les asymptotes. Montrer que toutes ces courbes passent par le point de coordonnées $(0,1)$.

Exercice 7 (Vérifications théoriques)**.** On considère trois nombres réels a, b et c, ainsi que l'équation différentielle
$$(L) : ay'' + by' + cy = 0$$

(1) : Pour $u \in \mathbb{R}$, vérifier que $f(t) = e^{ut}$ est solution de (L) si et seulement si u est solution de l'équation caractéristique $(C) : ax^2 + bx + c = 0$.
On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (C).

(2) : On suppose ici que $\Delta = 0$ et que $u = -\frac{b}{2a}$. Vérifier que $g(t) = te^{ut}$ est aussi solution de (L).

(3) : On suppose ici que $\Delta < 0$, que $u = -\frac{b}{2a}$ et que $v = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Vérifier que $f(t) = e^{ut}\cos(vt)$ et $g(t) = e^{ut}\sin(vt)$ sont alors solutions de (L).

Exercice 8. Intégrer les équations différentielles suivantes :

(1) : $y'' - 5y' + 6y = x$;

(2) : $y'' - 4y' + 4y = e^x$;

(3) : $y'' + \omega^2 y = 1$ où ω est un nombre réel donné ;

(4) : $y'' - 2y' + 2y = \cos x$;

(5) : $2y'' + 2y' + y = xe^{-x}$;

(6) : $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{sh}x$;

(7) : $y'' + y = |x| + 1$.

On pourra exprimer la solution générale à l'aide des conditions initiales en zéro y_0 et y'_0.

Exercice 9. Montrer que si y est solution de l'équation différentielle
$$(E) : xy'' + (x-2)y' - 2y = 0$$
alors la fonction auxiliaire $u = y' + y$ est solution d'une équation différentielle qu'on déterminera. Résoudre (E).

Exercice 10. Le symbole f désigne une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $(E_a) : y'' + ay = f(x)$, dépendant du paramètre $a \in \mathbb{R}$.
On suppose que pour deux nombres réels distincts a_1 et a_2, les équations (E_{a_1}) et (E_{a_2}) admettent une solution commune sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 11. On considère l'équation différentielle
$$(E) : ax^2y'' + bxy' + cy = 0\,,$$
où a, b et c sont trois réels fixés.

(1) : Montrer que la fonction $x \mapsto e^{\alpha \ln x}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement le réel α est racine d'un polynôme de degré deux qu'on déterminera.

(2) : On suppose que les nombres réels α et β sont distincts et que les fonctions $x \mapsto e^{\alpha \ln x}$ et $x \mapsto e^{\beta \ln x}$ sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer alors que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme $x \mapsto Ae^{\alpha \ln x} + Be^{\beta \ln x}$, avec A, B réels.