Université de Picardie Jules Verne **2015-2016**
UFR des Sciences

Licence Sciences, Technologies, Santé toutes mentions - Semestre 2

Introduction au calcul des probabilités

Lorsqu'on jette un dé en l'air, on est certain qu'il va retomber et s'immobiliser sur une de ses faces, mais on est incapable de prévoir exactement laquelle. De nombreuses situations semblent obéir à cette dualité : d'une part des aspects prévisibles, déterministes, nécessaires ; d'autre part des aspects imprévisibles, aléatoires.

L'objectif est ici de proposer un modèle mathématique permettant de décrire une situation aléatoire.

On décrit une situation aléatoire bien définie à l'aide du langage des événements. En modélisant les événements par des ensembles, on dispose, grâce au langage des ensembles, d'un outil de calcul sur les événements.

La notion de probabilité répond au besoin de définir une mesure sur les ensembles (représentant les événements) permettant de quantifier la chance qu'ont les événements d'être réalisés ou non.

1. La notion d'événement

Expérience et univers.

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$: expérience qui, répétée dans les mêmes conditions, peut conduire à des résultats différents (dus "au hasard").

Univers Ω associé à $\mathcal{E}$: ensemble de tous les résultats possibles (a priori) de $\mathcal{E}$. Il peut être fini ou infini (dénombrable si on on peut indexer les résultats par des entiers naturel, ou non dénombrable).

On désignera par ω tout résultat, c'est-à-dire tout élément de Ω.

Exemple 1. $\mathcal{E}$: "lancer d'un dé cubique (faces numérotées de 1 à 6)".
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Exemple 2. $\mathcal{E}$: "lancer deux dés cubiques discernables (faces numérotées de 1 à 6)".
$\Omega = \Big\{(x,y),\ x,y \in \{1,2,3,4,5,6\}\Big\}$.

Exemple 3. $\mathcal{E}$: "tirer une main de 8 cartes dans un jeu de 32 cartes".
$\Omega = \Big\{\text{combinaisons de 8 cartes prises parmi 32}\Big\}$.

Exemple 4. $\mathcal{E}$: "on lance une pièce jusqu'à obtenir 1 fois Pile".
Si l'on appelle "résultat" le nombre de lancers nécessaires, alors $\Omega = \mathbb{N}^*$.

Exemple 5. $\mathcal{E}$: "on tire une balle sur une cible de diamètre 1m".
Si l'on appelle "résultat" la distance du point d'impact au centre de la cible : $\Omega = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Evénement.

Evenement lié à $\mathcal{E}$: assertion ou proposition logique dont on peut dire qu'elle est vraie ou non une fois l'expérience $\mathcal{E}$ réalisée (i.e. pour tout résultat $\omega \in \Omega$).

On dit qu'un événement est réalisé si l'assertion qui le définit est vraie.

On convient alors d'identifier un tel événement au sous-ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels il est réalisé : un événement lié à $\mathcal{E}$ est alors une partie de Ω.

Reprenons l'exemple 1.
$\mathcal{E}$: "lancer un dé ". $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
Evénement A : "obtenir un numéro pair", identifié à $\{2,4,6\}$

Ainsi, lorsque ω est le résultat d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ et A est un événement, on a

$$(A \text{ est réalisé}) \iff \omega \in A$$

Définitions.

$\{\omega\}$ est appelé événement élémentaire, Ω événement certain (toujours réalisé) et $\emptyset$ événement impossible (jamais réalisé).

Opérations sur les événements.

Soient A et B deux événements liés à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$. On peut alors considérer les :

- événement $\overline{A}$: événement contraire de A, réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé ;
- évènenement $A \cap B$: réalisé si et seulement si A et B sont réalisés simultanément
- évènenement $A \cup B$: réalisé si et seulement si l'un au moins des événements A ou B est réalisé.

Reprenons l'exemple 1. $\mathcal{E}$: "lancer de un dé ". $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Les événements A : "on obtient un nombre pair" et B : "on obtient un multiple de 3" sont $A = \{2,4,6\}$ et $B = \{3,6\}$. Les événements $A \cap B$: "on obtient un multiple pair de 3" et $A \cup B$: "on obtient un nombre pair ou un multiple de 3" sont alors $A \cap B = \{6\}$ et $A \cup B = \{2,3,4,6\}$.

D'autre part, si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite infinie d'événements, on peut également être amené à considérer les événements $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Le fait de pouvoir effectuer toutes ces opérations sur les événements est assuré lorsque l'ensemble $\mathcal{A}$ des événements est une tribu, notion mathématique que nous n'abordons pas ici. Lorsque Ω est fini ou infini dénombrable, on aura $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, ensemble des parties de Ω.

Ainsi, $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable lié à $\mathcal{E}$.

Définitions. Soient A et B deux événements.

On dit que l'événement A entraine (ou implique) l'événement B si et seulement si $A \subset B$.

On dit que A et B sont incompatibles (ou disjoints) si $A \cap B = \emptyset$.

On appelle système complet d'événements toute partition de Ω, c'est-à-dire tout ensemble $\{A_i\}_{i\in I}$, avec $I \subset \mathbb{N}$, d'événements deux à deux incompatibles (i.e. pour tous $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$) tels que $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Exemples.

a) Reprenons l'exemple 1. Les événements A : obtenir un nombre pair et B : obtenir un nombre impair sont disjoints car $A \cap B = \{2,4,6\} \cap \{1,3,5\} = \emptyset$.

b) Si A est un événement, alors $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet fini d'événements.

c) Posons $\Omega = \left\{\omega_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Alors $\left\{\{\omega_n\},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ est un système complet infini dénombrable d'événements.

2. La notion de probabilité

2.1. Introduction - Approche par les fréquences

Voir l'annexe au paragraphe 5.

Plus généralement, on répète n fois une même expérience aléatoire dans les mêmes conditions. On note n_A le nombre de réalisations d'un événement A donné au cours de ces n expériences. On considère un autre événement B. Soit $f_A = \dfrac{n_A}{n}$ la fréquence statistique de l'événement A, f_B celle de B. On a :

(i) $f_A \in [0,1]$ et $f_B \in [0,1]$.

(ii) si A est l'événement certain, alors $n_A = n$, et donc $f_A = 1$.

(iii) si A et B sont incompatibles, alors $n_{A\cup B} = n_A + n_B$, et donc $f_{A\cup B} = \dfrac{n_{A\cup B}}{n} = \dfrac{n_A + n_B}{n} = f_A + f_B$.

2.2. Définition et propriétés d'une probabilité

Considérons l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$: tirer une carte dans un jeu de 32 cartes. On peut donc considérer $\Omega = \left\{32 \text{ cartes}\right\}$, avec Ω fini, et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, ensemble des parties de Ω.

On propose d'associer à chaque événement A, lié à l'expérience $\mathcal{E}$, un nombre compris entre 0 et 1, que l'on appellera la probabilité de l'événement A, et qui donne une mesure de la possibilité de réalisation de A. Par exemple à l'événement A : "tirer une carte de pique", il semble naturel d'associer le nombre $\dfrac{1}{4}$, le quart des cartes du jeu sont des cartes de pique.

Une probabilité sera donc une application P de $\mathcal{A}$ dans $[0,1]$. Quelles doivent être ses propriétés ?

La probabilité de l'événement certain Ω doit naturellement être égale à 1.

Soient A l'événement : "tirer une carte de pique" et B l'événement : "tirer une carte de trèfle". Il semble naturel d'affecter à ces deux événements la probabilité $P(A) = P(B) = \dfrac{1}{4}$.

A et B sont deux événements incompatibles. $A \cup B$ est l'événement: "tirer une carte noire". Il semble naturel d'affecter à cet événement la probabilité $\frac{1}{2}$, car la moitié des cartes du jeu sont noires. On a alors $P(A \cup B) = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = P(A) + P(B)$

Définition.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application P de $\mathcal{A}$ dans $[0,1]$ telle que :

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (additivité de P).

(iii) Pour toute suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, on a $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé. Lorsque Ω est fini, la condition (iii) est inutile.

Propriétés.

(i) $P(\emptyset) = 0$. (ii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. (iii) Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

(iv) En général, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(v) Si $\{A_i\}_{i\in I}$ est un système complet d'événements, avec $I \subset \mathbb{N}$, alors $\sum_{i\in I} P(A_i) = 1$.

(vi) Pour tout entier $n \geq 2$ et tous événements $A_1, \ldots, A_n$ 2 à 2 incompatibles, on a $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Construction d'une probabilité sur un univers fini.

Posons $\Omega = \{\omega_1, \omega_i, \ldots, \omega_n\}$, et $p_i = P(\{\omega_i\})$. Pour tout événement $A = \bigcup_{\omega\in A} \{\omega\}$,

on a $P(A) = P\left(\bigcup_{\omega\in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$, les $\{\omega\}$ étant 2 à 2 incompatibles.

De plus, $1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Une probabilité P sur Ω est donc définie par la donnée des nombres $p_i = P(\{\omega_i\})$, avec $p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Exemple fondamental de l'équiprobabilité sur un univers fini.

Si l'on suppose qu'aucun événement élémentaire $\{\omega_i\}$ n'a plus de chance de se réaliser que les autres, on dit qu'il y a équiprobabilité (les p_i sont égaux) et on a : pour tout $i = 1, \ldots, n$, $p_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$.

On a donc $P(A) = \sum_{\omega\in A} \frac{1}{n} = cardA \times \frac{1}{n}$. La probabilité P est alors définie de façon unique :

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{nombre\ de\ résultats\ favorables\ à\ A}{nombre\ de\ résultats\ possibles}$$

Les calculs avec une telle probabilité se ramènent alors à des problèmes de dénombrement.

Dénombrement

Le nombre de possibilités de choisir p éléments dans un ensemble contenant n éléments est :

- n^p si on les ordonne et si on peut répéter un élément (arrangements avec répétition de p éléments choisis parmi n) ;

- $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ si on les ordonne et si on ne peut pas répéter un élément (arrangements de p éléments choisis parmi n) ;

- $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ si on ne les ordonne pas et si on ne peut pas répéter un élément (combinaisons de p éléments choisis parmi n) ;

- $K_n^p = \binom{n+p-1}{p}$ si on ne les ordonne pas et si on peut répéter un élément (combinaisons avec répétition de p éléments choisis parmi n).

Le nombre de permutations de n éléments distincts est $A_n^n = n!$.

On a $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (en particulier $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$) et $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ (ce qui permet de construire le triangle de Pascal).

3. Probabilité conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé

Probabilité de A sachant B.

Soit B un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement A, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B (i.e. sachant que B est réalisé) le nombre réel noté $P(A/B)$ ou $P^B(A)$ défini par :

$$P(A/B) = P^B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Formule des probabilités composées.

(i) si A et B sont 2 événements tels que $P(A) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(A)P^A(B)$

(ii) si A, B et C sont 3 événements tels que $P(A \cap B) \neq 0$, alors $P(A \cap B \cap C) = P(A)P^A(B)P^{A\cap B}(C)$

(iii) on peut généraliser à n événements

Exemple.

Dans une urne contenant 10 boules blanches et 5 boules noires on tire successivement et sans remise 2 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?

Soient les événements A_i : "la i-ème boule tirée est blanche", $i = 1, 2$. On veut calculer $P(A_1 \cap A_2)$.

On a $P(A_1) = \frac{10}{15}$ (il y a 10 boules blanches parmi les 15 boules de l'urne)

et $P^{A_1}(A_2) = \frac{9}{14}$ (il n'y a plus que 9 boules blanches parmi les 14 boules de l'urne),

donc $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P^{A_1}(A_2) = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$.

Formule des probabilités complètes.

Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilité non nulle, i.e. $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$, les A_i étant deux à deux incompatibles et tels que $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$. Alors, pour tout événement B, on a

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i)P^{A_i}(B).$$

Preuve d'un exemple : système complet d'événement $\{A, \overline{A}\}$.

Soit un événement A tel que $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) \neq 0$. Considérant le système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$, on obtient $B = \Omega \cap B = (A \cup \overline{A}) \cap B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, ces deux événements étant incompatibles, donc $P(B) = P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) = P((A \cap B)) + P((\overline{A} \cap B)) = P(A)P^A(B) + P(\overline{A})P^{\overline{A}}(B)$.

Formule de Bayes.

Dans les conditions ci-dessus et pour tout événement B de probabilité non nulle, on a

$$\text{pour tout } j \in I,\ P(A_j/B) = P^B(A_j) = \frac{P(A_j)P^{A_j}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P^{A_j}(B)}{\sum_{i\in I} P(A_i)P^{A_i}(B)}.$$

Preuve.

Par définition, $P^B(A_j) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$. Les formules des probabilités composées et complètes donnent respectivement $P(A_j \cap B) = P(A_j)P^{A_j}(B)$ et $P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i)P^{A_i}(B)$.

Remarque. Cette formule s'interprète souvent de la façon suivante : les A_i sont les différentes causes pouvant conduire à la réalisation de B. Connaissant les probabilités $P(A_i)$ de chaque cause et celles $P^{A_i}(B)$ de B conditionnellement aux causes A_i, on calcule la probabilité $P^B(A_j)$ que la réalisation de B soit due à la cause A_j.

4. Indépendance d'événements

Lorsque A et B sont deux événements, on peut caractériser le fait que A et B sont indépendants, i.e. que A se réalise indépendamment de la réalisation ou non de B, par l'égalité $P^B(A) = P(A) = P^{\overline{B}}(A)$. Utilisant le fait que $P^B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, on adopte alors la définition suivante.

Indépendance de deux événements.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Deux événements A et B sont dits indépendants (en probabilité) si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Remarque
A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ sont indépendants, si et seulement si $\overline{A}$ et B sont indépendants, si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Indépendance de 3 événements.
On dit que trois événements A, B et C sont (mutuellement) indépendants si et seulement si
$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(A \cap C) = P(A)P(C), \quad P(B \cap C) = P(B)P(C)$
et $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

On peut généraliser la notion d'indépendance à une famille de n événements.
Dans ces conditions, on a aussi la mutuelle indépendance en remplaçant certains événements par leur événement contraire.

Application à la répétition d'expériences.
On rencontrera souvent la situation suivante : on répète n fois la même expérience aléatoire $\mathcal{E}$, dans les mêmes conditions. Il est alors naturel de considérer les résultats de ces n expériences comme mutuellement indépendants. Plus précisément, si A_i est un événement lié à la i-ème expérience, $i = 1, \ldots, n$, alors les n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants.

5. Annexe : approche des probabilités par les fréquences

Exemple 1
On considère l'expérience aléatoire "lancer une pièce". Deux résultats sont possibles : Pile ou Face.

1er cas : la pièce est équilibrée
On a l'intuition d'avoir une chance sur deux d'avoir Pile et une chance sur deux d'avoir Face, ce que l'on traduira par : la probabilité d'avoir Pile est égale à $\dfrac{1}{2} = 0,5$ et celle d'avoir Face est égale à $\dfrac{1}{2} = 0,5$.

Cette intuition peut être expliquée de la façon suivante. Lorsqu'on effectue un nombre n suffisamment grand de lancers de la pièce, on pense obtenir à peu près le même nombre n_1 de Pile que le nombre n_2 de Face, avec $n_1 + n_2 = n$. Considérant les fréquences d'apparition $f_1 = \dfrac{n_1}{n}$ de Pile et $f_2 = \dfrac{n_2}{n}$ de Face, on pense donc avoir $f_1 \simeq f_2$, avec $f_1 + f_2 = 1$, ce qui donne $f_1 \simeq \dfrac{1}{2}$ et $f_2 \simeq \dfrac{1}{2}$.

Voici les résultats obtenus lors de lancers successifs de la pièce.

Nombre de lancers	6	10	20	30	40	50	100	200	400	1000
Nombre de Pile	2	4	11	16	21	27	51	102	203	490
Nombre de Face	4	6	9	14	19	23	49	98	197	510
Fréquence de Pile	0,333	0,400	0,550	0,533	0,525	0,540	0,510	0,510	0,508	0,490
Fréquence de Face	0,667	0,600	0,450	0,467	0,475	0,460	0,490	0,490	0,492	0,510

2ème cas : la pièce est truquée de sorte que Pile sort deux fois plus souvent que Face

On a l'intuition d'avoir deux chances sur trois d'avoir Pile et une chance sur trois d'avoir Face, ce que l'on traduira par : la probabilité d'avoir Pile est égale à $\frac{2}{3} = 0,667$ et celle d'avoir Face est égale à $\frac{1}{3} = 0,333$.

Cette intuition peut être expliquée de la façon suivante. Lorsqu'on effectue un nombre n suffisamment grand delancer de la pièce, on pense obtenir à peu près un nombre n_1 de Pile deux fois plus grand que le nombre n_2 de Face, avec $n_1 + n_2 = n$. Considérant les fréquences d'apparition $f_1 = \frac{n_1}{n}$ de Pile et $f_2 = \frac{n_2}{n}$ de Face, on pense donc avoir $f_1 \simeq 2f_2$, avec $f_1 + f_2 = 1$, ce qui donne $f_1 \simeq \frac{2}{3}$ et $f_2 \simeq \frac{1}{3}$.

Voici les résultats obtenus lors de lancers successifs de la pièce.

Nombre de lancers	6	10	20	30	40	50	100	200	400	1000
Nombre de Pile	5	8	12	18	24	29	57	120	263	656
Nombre de Face	1	2	8	12	16	21	43	80	137	344
Fréquence de Pile	0,833	0,800	0,600	0,600	0,600	0,580	0,570	0,600	0,658	0,656
Fréquence de Face	0,167	0,200	0,400	0,400	0,400	0,420	0,430	0,400	0,342	0,344

Exemple 2

On considère l'expérience aléatoire "lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6". Six résultats sont possibles : 1, 2, 3, 4, 5, 6. On a l'intuition d'avoir une chance sur six d'obtenir chacune des six faces, ce que l'on traduit par : la probabilité d'obtenir chacune des six faces est égale à $\frac{1}{6} = 0,167$. On écrira $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$.

Voici les résultats obtenus lors de lancers successifs du dé. Comme dans l'exemple 1, on peut observer que la fréquence d'apparition f_i de chacune des faces i est proche de $\frac{1}{6} = 0,167$ dès que le nombre de lancers est suffisamment grand.

Nombre de lancers	30	50	100	200	300	600	1000	2000
Nombre de 1	7	10	15	30	46	88	160	320
Nombre de 2	7	8	18	39	57	111	175	334
Nombre de 3	6	10	19	34	54	110	180	385
Nombre de 4	1	3	12	23	42	96	157	315
Nombre de 5	4	9	18	34	49	97	162	328
Nombre de 6	5	10	18	40	52	98	166	318
Fréquence de 1	0,233	0,200	0,150	0,150	0,153	0,147	0,160	0,160
Fréquence de 2	0,233	0,160	0,180	0,195	0,190	0,185	0,175	0,167
Fréquence de 3	0,200	0,200	0,190	0,170	0,180	0,183	0,180	0,193
Fréquence de 4	0,033	0,060	0,120	0,115	0,140	0,160	0,157	0,158
Fréquence de 5	0,133	0,180	0,180	0,170	0,163	0,162	0,162	0,164
Fréquence de 6	0,167	0,200	0,180	0,200	0,173	0,163	0,166	0,159

Considérons l'événement A : "obtenir une face paire".

Si l'on désigne par $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ l'ensemble des résultats possibles, on désignera naturellement par $A = \{2,4,6\}$ l'événement "obtenir une face paire". Comme le dé est équilibré, on a l'intuition que l'on aura trois chances sur six d'obtenir une face paire, ce que l'on traduira par : la probabilité d'obtenir une face paire est égale à $\frac{3}{6}$, et on écrira

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{card A}{card \Omega} = \frac{\text{nombre de résultats favorables à } A}{\text{nombre de résultats possibles}}.$$

On peut ausi remarquer que $P(A) = P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$.

Cette intuition peut encore s'observer sur les fréquences. La fréquence de l'événement A est évidemment égale à $f_2+f_4+f_6$, et on peut observer qu'elle est proche de $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ dès que le nombre de lancers est suffisamment grand.

Fréquence de A	0,433	0,420	0,480	0,510	0,503	0,508	0,498	0,484

6. Exercices

Exercice 1.

1) Pour accéder à un service d'échanges de données sur Internet, vous devez taper un mot de passe de quatre lettres (alphabet latin miniscule). Un mot de passe n'a pas nécessairement de sens en français.

a) Combien de mots de passe de quatre lettres distinctes peut-on créer ?

b) Combien de mots de passe de quatre lettres quelconques, c'est-à-dire non nécessairement distinctes, peut-on créer ?

2) La société YOPMILK fabrique des yaourts aux fruits avec dix parfums différents. Le directeur des ventes propose de constituer des lots de quatre pots de parfums tous différents.

a) Combien de lots distincts peut-on former de cette façon ?

b) Combien de lots distincts de ce type peut-on former sachant qu'ils ne doivent pas contenir simultanément un pot à la fraise et un à la framboise ?

c) Le service commercial abandonne l'idée et décide de constituer des lots de quatre pots de parfums quelconques, c'est-à-dire non nécessairement tous différents. Combien de lots distincts peut-on ainsi former ?

Exercice 2.

On soumet 1080 personnes à un test psychotechnique noté de 0 à 5. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous, où les individus ont été classés en trois catégories suivant le secteur d'activité de leur emploi actuel.

secteur \ note	0	1	2	3	4	5
industrie A	60	60	60	60	60	60
agriculture B	40	40	80	80	0	0
services C	80	60	60	80	80	120

On choisit un individu au hasard dans le groupe testé.

1) Quelle est la probabilité de choisir un individu de type A et ayant la note 2 ?

2) Quelle est la probabilité de choisir un individu de type A ?

3) Quelle est la probabilité de choisir un individu ayant la note 5 ?

Exercice 3.

On extrait au hasard 8 cartes d'un jeu de 52 cartes.

1) On considère les événements A_1: "on obtient au moins 1 as", A_2: "on obtient 4 as" et A_3: "on obtient au plus 4 as".

a) Exprimer en langage courant les événements contraires de A_1, A_2 et A_3.

b) Calculer $P(\overline{A_1})$. En déduire $P(A_1)$.

c) Calculer $P(A_2)$.

d) Donner $P(A_3)$ et $P(\overline{A_3})$.

2) Calculer la probabilité des événements suivants :

a) A : "on obtient exactement 4 as et 2 rois".

b) B : "on obtient exactement 3 trèfles et 2 rois".

Exercice 4.

On jette quatre dés discernables équilibrés dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle résultat la suite ordonnée des quatre faces obtenues. Calculer la probabilité des événements suivants :

1) A : "on n'obtient pas d'as".

2) B : "on obtient au moins un as".

3) C : "on obtient exactement un as".

4) D : "on obtient un as au deuxième lancer".

5) F : "on obtient un carré" (4 faces identiques).

6) E : "on obtient au moins une fois un numéro pair".

Exercice 5.

Dans une population, 45% des individus sont vaccinés contre la fièvre jaune, 60% sont vaccinés contre la diphtérie et 30% contre les deux maladies.

1) Traduire ces données en termes de probabilités d'événements.

2) Calculer la probabilité pour qu'un individu, choisi au hasard, soit vacciné contre au moins une des deux maladies.

3) En déduire la probabilité pour qu'un individu, choisi au hasard, ne soit vacciné contre aucune des deux maladies.

4) Calculer la probabilité qu'un individu soit vacciné contre la fièvre jaune mais pas contre la diphtérie.

5) Calculer la probabilité qu'un individu soit vacciné contre la fièvre jaune sachant qu'il est vacciné contre la diphtérie.

Exercice 6.

1) Dans une entreprise, une machine A fabrique 40% des pièces et une machine B fabrique 60% des pièces. Le pourcentage de pièces défectueuses fabriquées par A est de 3%, et par B de 2%. On choisit une pièce au hasard dans la production.

a) Traduire ces données en termes de probabilités d'événements.

b) Calculer la probabilité que la pièce choisie soit défectueuse.

c) Sachant la pièce choisie défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par A ?

2) Mêmes question avec trois machines A, B et C, fabriquant respectivement 20%, 30% et 50% des pièces, avec des pourcentages de pièces défectueuses respectivement de 5%, 4% et 1%.

Exercice 7. *(D'après partiel de novembre 2007)*

Un dépistage systématique concernant un éventuel trouble de l'audition est effectué à la naissance. On sait que 2% des nouveaux-nés présentent des troubles de l'audition. Ce dépistage commence par un test donnant 95% de résultats positifs pour les nouveaux-nés atteints de ces troubles, et 6% de résultats positifs pour les nouveaux-nés n'ayant pas ces troubles.

1) Traduire les données de l'énoncé en terme de probabilité d'événements. Préciser l'expérience aléatoire considérée et proposer un espace probabilisé adapté à cette expérience.

2) Quelle est la probabilité qu'un nouveaux-né pris au hasard ait un test positif ? Justifier le calcul.

3) Quelle est la probabilité qu'un nouveaux-né pris au hasard soit atteint de ces troubles sachant que le test a donné un résultat positif ?

4) Quelle est la probabilité qu'un nouveaux-né pris au hasard soit atteint de ces troubles sachant que le test a donné un résultat négatif ?

5) Le test vous paraît-il fiable ?

Exercice 8.

Un grand magasin est équipé d'un système d'alerte contre l'incendie. L'installateur du système assure qu'en cas de début d'incendie, l'alerte sera donnée avec une probabilité de 0,99. Mais il faut noter que même sans aucun danger, l'alarme peut tout de même se déclencher, donnant lieu à une fausse alerte, avec une probabilité évaluée à 0,007. La compagnie d'assurance du grand magasin considère qu'un incendie peut s'y déclarer avec une probabilité égale à 0,001.

Si le système se déclenche, quelle est la probabilité que ce soit une fausse alerte ?

Exercice 9.

Dans une entreprise, la probabilité qu'un ouvrier A quitte l'entreprise dans l'année est égale à 1/5, et la probabilité qu'un cadre B quitte l'entreprise dans l'année est égale à 1/8. En supposant ces deux événements indépendants, calculer la probabilité que :

1) A et B quittent l'entreprise.

2) l'un des deux quitte l'entreprise.

3) ni A, ni B ne quitte l'entreprise.

4) B seulement quitte l'entreprise.

Exercice 10.

On considère une assemblée de n personnes, avec $n \geq 2$. Calculer la probabilité qu'au moins deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire.