Université de Picardie Jules Verne **2015-2016**
UFR des Sciences

Licence Sciences, Technologies, Santé toutes mentions - Semestre 2
Probabilités et Statistique

Notion de variable aléatoire réelle discrète

Considérons une population Ω sur laquelle on définit un caractère quantitatif X.

X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout individu ω, associe un réel $x = X(\omega) \in X(\Omega) = \Omega_X$ ensemble des valeurs du caractère.

Cette application modélise le caractère de façon déterministe en ce sens que, si on connaît l'individu ω, on connaît aussitôt la valeur x. Son étude relève de la statistique descriptive qui conduit, par exemple, au tableau des couples (x_i, f_i) où x_i est une valeur observée et f_i sa fréquence.

Exemple : le nombre d'enfants X d'une famille d'une population Ω de 1000 familles amiénoises a donné :

Nombre d'enfants x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de familles n_i	162	240	297	208	62	16	8	5	2
Fréquence f_i	0.162	0.240	0.297	0.208	0.062	0.016	0.008	0.005	0.002

Supposons maintenant que l'on tire au hasard un individu ω dans cette population Ω pour consigner la valeur x du caractère. Ne pouvant pas prévoir quel individu précis sera tiré, on ne peut pas prévoir non plus la valeur précise de x qui sera consigner. On aimerait donc disposer d'un moyen d'attribuer une probabilité aux éléments de Ω_X, ce qui conduit au tableau des couples (x_i, p_i) où x_i est une valeur observée et p_i sa probabilité.

Prenant $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P l'équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on écrira par exemple $P(X = 0) = \dfrac{162}{1000} = 0.162$.

De même qu'un caractère quantitatif peut être discret ou continu, on parlera de variable aléatoire discrète ou continue (dans le deuxième cas, on parlera de variable aléatoire à densité).

1. Cas d'un nombre fini de valeurs

Exemple introductif.

Un joueur lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6, et on observe le numéro obtenu. Si le joueur obtient 1, 3 ou 5, il gagne 1 euro ; s'il obtient 2 ou 4, il gagne 5 euros ; s'il obtient 6, il perd 10 euros.

Prenons $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P l'équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$

Soit X l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à tout $\omega \in \Omega$ associe le gain correspondant.

On a $X(1) = X(3) = X(5) = 1$, $X(2) = X(4) = 5$ et $X(6) = -10$. Ainsi, $\Omega_X = \{1, 5, -10\}$.

On peut s'intéresser à la probabilité de gagner 1 euro, c'est-à-dire d'avoir $X(\omega) = 1$, ce qui se réalise si et seulement si $\omega \in \{1, 3, 5\}$. La probabilité cherchée est donc égale à $P(\{1, 3, 5\}) = 3/6 = 1/2$. On pourra alors considérer l'événement $(X = 1) = \{1, 3, 5\}$ et écrire $P(X = 1) = 1/2$.

On aura de même $P(X = 5) = 1/3$ et $P(X = -10) = 1/6$.

Définitions. **Notations**.

On considère une expérience aléatoire et $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé **fini** adapté.

On appelle variable aléatoire réelle (v.a.r.) toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\Omega_X = X(\Omega)$ des valeurs prises par X est appelé univers-image. Ω_X est alors fini.

Les événements $\left\{\omega \in \Omega \;/\; X(\omega) = x\right\}$, $\left\{\omega \in \Omega \;/\; X(\omega) \leq x\right\}$ et $\left\{\omega \in \Omega \;/\; a < X(\omega) \leq x\right\}$ sont notés respectivement $(X = x)$, $(X \leq x)$ et $(a < X \leq x)$.

Loi de probabilité.

Si X est une v.a.r. dont l'univers-image fini est $\Omega_X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors X est appelée v.a.r. discrète finie et on appelle loi de probabilité de X la donnée des couples (x_i, p_i), avec $p_i = P(X = x_i)$.

On pourra toujours s'assurer que l'on a bien $p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Exemple.

Reprenons l'exemple introductif. La loi de probabilité de X est donnée par

x_i	-10	1	5	
p_i	1/6	1/2	1/3	1

Fonction de répartition.

Si X est une v.a.r., alors on appelle fonction de répartition de X la fonction F_X de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par, pour tout réel x, $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Si X est discrète finie, alors F_X est une fonction en escalier dont les sauts se présentent aux points x_i de Ω_X, chaque saut étant égal à $p_i = P(X = x_i)$.

Exemple. Reprenons l'exemple introductif. On a :

- pour tout $x < -10$, $F_X(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$;
- pour tout $-10 \leq x < 1$, $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = -10) = 1/6$;
- pour tout $1 \leq x < 5$,
$F_X(x) = P(X \leq x) = P((X = -10) \cup (X = 1)) = P(X = -10) + P(X = 1) = 1/6 + 1/2 = 2/3$;
- pour tout $x \geq 5$, $F_X(x) = P(X \leq x) = P(\Omega) = 1$.

Remarque. On a donc $F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{k=1}^{i} p_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_i$, probabilité que X prenne une valeur inférieure ou égale à x_i.

En statistique descriptive des variables quantitatives discrètes, les fréquences cumulées étaient données par : $F_i = \sum_{k=1}^{i} f_k = f_1 + f_2 + \cdots + f_i$, et représentaient la fréquence des valeurs inférieures ou égales à x_i.

Interprétant les probabilités p_i comme les limites des fréquences f_i sur un échantillon, on observe que les formules et leur interprétation sont analogues.

Espérance mathématique. **Variance**. **Ecart-type**.

Soit X une v.a.r. discrète dont l'univers-image fini est $\Omega_X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

On appelle espérance mathématique de X le réel $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$. Ce nombre représente la valeur moyenne de X.

On appelle variance de X le réel $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$.

On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$.

On appelle écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

On appelle intervalle moyen de X l'intervalle $[E(X) - \sigma(X), E(X) + \sigma(X)]$.

Exemple. Reprenons l'exemple introductif.

On a $E(X) = \frac{1}{6} \times (-10) + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times 5 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

On a $E(X^2) = \frac{1}{6} \times (-10)^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{3} \times 5^2 = \frac{153}{6} = \frac{51}{2}$,

d'où $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{51}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{101}{4}$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{101}}{2} = 5,025$.

Remarque.

En statistique descriptive des variables quantitatives discrètes, nous avions les formules suivantes.

Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_i x_i = \sum \frac{n_i}{n} x_i = \sum f_i x_i$

Variance : $s_x^2 = \frac{1}{n} \sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \sum f_i x_i^2 - \bar{x}^2$. Ecart-type : $s_x = \sqrt{s_x^2}$.

Interprétant les p_i comme les limites des f_i, les formules et leur interprétation sont analogues.

Changement d'origine et d'échelle

Il arrive souvent que l'on effectue une transformation affine $X \mapsto aX + b$ sur une variable aléatoire X, a étant le paramètre de changement d'échelle, et b le paramètre de changement d'origine. On a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b \ ; \qquad Var(aX + b) = a^2 Var(X) \ ; \qquad \sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X).$$

Lois classiques : **Binomiale et Hypergéométrique**.

Répétition d'expériences.

On répète n fois dans les mêmes conditions une même expérience aléatoire (les répétitions étant indépendantes entre elles) au cours de laquelle un événement A a une probabilité p d'être réalisé.

La variable aléatoire X, égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé, suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, ce qui signifie que :

X est à valeurs dans $\Omega_X = \{0,1,\ldots,n\}$ et, pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

On a de plus : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Tirages dans une population à 2 catégories.

On considère une population de N individus à deux catégories, avec N_1 individus de catégorie 1 et N_2 individus de catégorie 2 (on a $N_1 + N_2 = N$).

On effectue n tirages d'un individu dans la population et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'individus de catégorie 1 obtenus.

Si on effectue les tirages **avec remise**, alors X suit la loi Binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{N_1}{N}\right)$.

Si on effectue les tirages **sans remise** ou **simultanés** (dans ce cas, on doit avoir $n \leq N$), alors X suit la loi Hypergéométrique $\mathcal{H}\left(N, n, \frac{N_1}{N}\right)$, ce qui signifie que

X est à valeurs dans $\Omega_X = \{\max(0, n-(N-N_1)), \min(N_1, n)\}$

et pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, $P(X=k) = \dfrac{C_{N_1}^k C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}$.

On a de plus : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$ en posant $p = \dfrac{N_1}{N}$.

Exemples.

1) On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois (exactement) Pile ?

On peut considérer que l'on répète $n = 10$ fois dans les mêmes conditions l'expérience aléatoire "lancer la pièce" (les répétitions étant indépendantes entre elles) au cours de laquelle l'événement A "obtenir Pile" a la probabilité $p = \frac{1}{2}$ d'être réalisé. La variable aléatoire X, égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé, i.e. au nombre de Pile obtenus, suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$, ce qui signifie que :

- X est à valeurs dans $\Omega_X = \{0,1,\ldots,n\} = \{0,1,\ldots,10\}$;
- pour tout $k \in \{0,1,\ldots,10\}$, $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_{10}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = C_{10}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

On en déduit que la probabilité d'obtenir 3 fois Pile est $P(X=3) = C_{10}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \simeq 0,1172$.

2) On tire successivement 4 boules d'une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires. Quelle est la probabilité d'obtenir (exactement) 2 boules blanches ?

On peut considérer que l'on effectue $n = 4$ tirages d'un individu dans la population des $N = 10$ boules, avec $N_1 = 3$ boules blanches et $N_2 = 7$ boules noires (on a $N_1 + N_2 = N$). Si on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues, alors :

- dans le cas de tirages avec remise, X suit la loi Binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{N_1}{N}\right) = \mathcal{B}\left(4, \frac{3}{10}\right)$; ainsi, X est à valeurs dans $\Omega_X = \{0,1,\ldots,n\} = \{0,1,\ldots,4\}$ et pour tout $k \in \{0,1,\ldots,4\}$, $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_4^k \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{4-k}$; on a donc $P(X=2) = C_4^2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^2 \simeq 0,2646$.
- dans le cas de tirages sans remise, X suit la loi Hypergéométrique $\mathcal{H}\left(N, n, \frac{N_1}{N}\right) = \mathcal{H}\left(10, 4, \frac{3}{10}\right)$; ainsi, X est à valeurs dans $\Omega_X = \{\max(0, n-(N-N_1)), \min(N_1, n)\} = \{0,1,2,3\}$ et pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$, $P(X=k) = \dfrac{C_{N_1}^k C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n} = \dfrac{C_3^k C_7^{4-k}}{C_{10}^4}$; on a donc $P(X=2) = \dfrac{C_3^2 C_7^2}{C_{10}^4} = 0,3$.

Remarque.

Lorsque N est très grand devant n (en pratique $N > 10n$), on peut approcher la loi Hypergéométrique $\mathcal{H}\left(N, n, \frac{N_1}{N}\right)$ par la loi Binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{N_1}{N}\right)$. Cela signifie que $\dfrac{C_{N_1}^k C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n} \simeq C_n^k \left(\dfrac{N_1}{N}\right)^k \left(1 - \dfrac{N_1}{N}\right)^{n-k}$.

2. Cas d'un nombre infini de valeurs

Définitions.

On appelle variable aléatoire réelle discrète infinie toute v.a.r. dont l'univers-image Ω_X (ensemble des valeurs prises par X) est infini dénombrable. Dans ce cours, on se limitera à $\Omega_X = \mathbb{N} = \{k / k \in \mathbb{N}\}$ ou $\Omega_X = \mathbb{N}^*$.

On appelle loi de probabilité de X la donnée des couples (k, p_k), avec $p_k = P(X = k)$, pour $k \in \Omega_X$.

On pourra toujours s'assurer que l'on a bien $p_k \geq 0$ et $\sum_{k \in \Omega_X} p_k = 1$.

Attention ! Cette dernière somme contient une infinité de termes ! Il s'agit de la somme d'une série numérique, qui peut être infinie ou ne pas exister. Nous n'aborderons pas dans ce cours les problèmes liés à cette notion.

Espérance mathématique. **Variance**. **Ecart-type**.

Soit X une v.a.r. discrète dont l'univers-image infini est Ω_X. Sous reserve d'existence des sommes indiquées ci-dessous, on a :

- espérance mathématique de X : $E(X) = \sum_{k \in \Omega_X} k p_k$.
- variance de X : $V(X) = \sum_{k \in \Omega_X} (k - E(X))^2 p_k$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{k \in \Omega_X} k^2 p_k - (E(X))^2$.
- écart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ - intervalle moyen de X : $[E(X) - \sigma(X), E(X) + \sigma(X)]$.

Lois classiques : **Poisson et Géométrique**.

Loi de Poisson.

Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ si et seulement si :

X est à valeurs dans $\Omega_X = \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$.

On a de plus : $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Loi Géométrique.

On répète dans les mêmes conditions une même expérience aléatoire (les répétitions étant indépendantes entre elles) au cours de laquelle un événement A a une probabilité p d'être réalisé.

La variable aléatoire X, égale au nombre d'expériences nécessaires pour avoir la première réalisation de A (i.e. au temps d'attente de l'événement A), suit la loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$, ce qui signifie que :

X est à valeurs dans $\Omega_X = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

On a de plus : $E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{1 - p}{p^2}$.

Remarque.

Lorsque n est grand et p assez petit (en pratique $n \geq 30$, $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$), on peut approcher la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$. Cela signifie que $C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \simeq e^{-np} \dfrac{(np)^k}{k!}$.

Ce résultat explique que la loi de Poisson est souvent utilisée lorsque la variable aléatoire X désigne le nombre de réalisations d'un événement rare.

Plus précisément, cette loi apparaît dans les processus de Poisson comme la limite, lorsque n tend vers l'infini, des lois Binomiales $B\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$, où λ est un réel strictement positif. En effet, un processus de Poisson est caractérisé par une variable aléatoire X qui dénombre les apparitions d'un certain événement aléatoire E au cours du temps de façon que :

a) la probabilité que E apparaisse au cours d'une courte période de l'unité de temps de durée Δt est proportionnelle à cette durée et indépendante de la période choisie : $P\left(E \text{ survient entre } t \text{ et } t + \Delta t\right) = \lambda \Delta t$;

b) la probabilité que E apparaisse plus d'une fois au cours de cette période est considérée comme nulle.

En décomposant l'unité de temps en n intervalles de durées égales à Δt, on a $\Delta t = \dfrac{1}{n}$ et $P\left(E \text{ survient entre } t \text{ et } t + \Delta t\right) = \dfrac{\lambda}{n}$. D'après la condition b), E apparait k fois au cours de l'unité de temps $(0 \leq k \leq n)$ s'il survient au cours de k intervalles élémentaires de durée $\dfrac{1}{n}$. Il résulte que X suit la loi Binomiale $B\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$. Lorsque Δt tend vers 0, c'est-à-dire n tend vers $+\infty$, on obtient une loi de Poisson.

3. Exercices

Exercice 1.

1) Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par :

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$0,25$	p_2	$0,18$	p_4	$0,37$

a) Déterminer les valeurs de p_2 et p_4, sachant que les événements $X = 2$ et $X = 4$ sont équiprobables.
b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.
c) Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

2) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de la variable aléatoire X de loi de probabilité :

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	1/8	1/4	1/5	1/8	3/10

Exercice 2.

Deux joueurs A et B lancent chacun une pièce de monnaie équilibrée. Si les deux pièces tombent sur Pile, le joueur A gagne et le joueur B lui verse a euros ; sinon, le joueur B gagne et A lui verse 2 euros. Un jeu est équitable si l'espérance de gain de chaque joueur est nulle.

1) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ adapté à cette expérience aléatoire.

2) On considère la variable aléatoire X égale au gain algébrique de A. Décrire l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ correspondante et déterminer la loi de probabilité de X.

3) Pour que le jeu soit équitable, combien le joueur B doit-il verser au joueur A lorsque ce dernier gagne ?

Exercice 3.

1) Un joueur a une chance sur trois de gagner une partie. Il joue cinq parties. Calculer la probabilité qu'il gagne : a) trois parties. b) cinq parties. c) au plus une partie. d) au moins deux parties.

2) Un joueur a une chance sur deux de gagner une partie. Combien doit-il jouer de parties pour que la probabilité qu'il gagne au moins une fois soit supérieure à 0,9 ?

Exercice 4.

L'oral d'un examen comporte 40 sujets possibles. Un candidat tire 3 sujets au hasard et choisit parmi ces 3 sujets celui qu'il désire traiter. Pour un candidat qui n'a révisé que 20 sujets, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de sujets qu'il a révisé parmi les 3 tirés.

1) Quelle est la loi de probabilité de X. Expliquer.

2) En déduire l'espérance mathématique et la variance de X.

3) Calculer la probabilité que ce candidat tire au moins un sujet qu'il a révisé.

4) Calculer cette même probabilité à l'aide d'une loi approchée de X. Cette approximation vous parait-elle raisonnable ?

Exercice 5.

Dans une production de pièces très nombreuse, il y a 3% de pièces défectueuses. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans un échantillon de 10 pièces prélevées au hasard.

1) Quelle est la loi de probabilité de X. Expliquer.

2) En déduire le nombre moyen de pièces défectueuses obtenu dans un lot de 10 pièces.

3) Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux pièces défectueuses.

Exercice 6.

Les centres de transfusion sanguine diffusent le tableau suivant donnant la répartition de la population française des principaux groupes sanguins :

	O	A	B	AB
rhésus +	37,0%	38,1%	6,2%	2,8%
rhésus -	7,0%	7,2%	1,2%	0,5%

1) Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard dans la population soit de groupe A ? de facteur rhésus + ? de groupe O et de facteur rhésus + ? Justifier les réponses.

2) Dix personnes sont prises au hasard dans la population française. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes de groupe A obtenu.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ? Justifier.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 personnes de groupe A ?

c) Quelle est la probabilité qu'au moins la moitié des personnes soit de groupe A ?

3) Pour une intervention chirurgicale, on doit avoir au moins 3 donneurs de groupe O et de facteur rhésus +. Dix personnes, ignorant leur groupe sanguin, sont disposées à ce don. Calculer la probabilité d'avoir au moins les donneurs nécessaires.

Exercice 7.

Le nombre de micro-ordinateurs vendus chaque jour dans le magasin HIGHTECH suit une loi de Poisson de paramètre 4. Calculer la probabilité que dans une journée :

1) on ne vende aucun micro-ordinateur 2) on vende 4 micro-ordinateurs

3) on vende au moins un micro-ordinateur.

4) le nombre de micro-ordinateurs vendus soit compris (au sens large) entre 2 et 6.

Exercice 8.

On suppose que chaque pièce mécanique produite par une machine a la probabilité p d'être défectueuse, et ceci de façon indépendante d'une pièce à l'autre.

1) Pour contrôler la qualité de la fabrication, on prélève au hasard 100 pièces dans la production, et on note X le nombre de pièces présentant des défauts.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Donner l'espérance mathématique de X pour $p = \frac{1}{50}$ et interpréter ce résultat.

2) On préleve au hasard des pièces une par une dans la production et on considère le nombre Y de pièces tirées lorsqu'on a obtenu la première pièce défectueuse.

a) Quelle est la loi de probabilité de Y ?

b) Donner l'espérance mathématique de Y pour $p = \frac{1}{50}$ et interpréter ce résultat.

Exercice 9. *(D'après examen de janvier 2013)*

Une entreprise conditionne et commercialise des bidons de désherbant liquide de 500 ml. Un bidon est commercialisable s'il contient au moins 490 ml de désherbant. Une étude statistique a montré que sur l'ensemble de la production, 2 % des bidons ne sont pas commercialisables. On prélève au hasard un échantillon de 100 bidons dans la production. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler le prélèvement à un tirage avec remise. On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon ainsi obtenu, associe le nombre de bidons de l'échantillon non commercialisables.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 2 bidons non commercialisables.

3) Justifier que l'on peut approcher la loi de Y par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

4) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité demandée au 2). Commenter.

Exercice 10. *(D'après partiel de novembre 2010)*

L'examen du code de la route est composé de 40 questions numérotées de 1 à 40. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, dont une seule est bonne. Un candidat est déclaré reçu à l'examen s'il donne au moins 35 bonnes réponses.

Un candidat, totalement ignorant du code de la route, décide de tenter sa chance en donnant, pour chacune des 40 questions, une réponse choisie au hasard parmi les quatre réponses proposées. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses données par le candidat.

1) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Justifier votre réponse.

2) Quel est le nombre moyen de bonnes réponses données par le candidat ?

3) Quelle est la probabilité que le candidat donne au moins une bonne réponse ?

4) Quelle est la probabilité que le candidat soit reçu à l'examen ?