Université de Picardie Jules Verne **2015-2016**
UFR des Sciences

Licence Sciences, Technologies, Santé toutes mentions - Semestre 2
Probabilités et Statistique

Notion de variable aléatoire réelle à densité

1. Généralités

On considère une expérience aléatoire, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé adapté et X une variable aléatoire réelle.

On a traité dans le chapitre précédent le cas où l'univers-image Ω_X (et donc l'univers Ω) était fini ou infini dénombrable. La loi de probabilité de X était alors donnée par les quantités $P(X = x_i)$ pour tout x_i de Ω_X.

Lorsque Ω_X (et donc Ω) est infini non-dénombrable (par exemple $\Omega_X = [a,b]$ ou $\mathbb{R}$), la théorie montre que $P(X = x) = 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$. On est alors amené à donner la loi de probabilité de X par sa fonction de répartition F_X définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Définition.

On appelle *densité* ou *densité de probabilité sur* $\mathbb{R}$ toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
- f est positive ;
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini ou dénombrable de points ;
- l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Définition.

Une variable aléatoire X est dite *continue* s'il existe une densité f_X telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$.

f_X est alors appelée *densité de X*. On dit aussi que X est une *variable aléatoire réelle à densité*.

Propriétés.

Soit X une variable aléatoire continue dont f_X est une densité, et soit F_X sa fonction de répartition.

Alors F_X est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$, continue et croissante sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini ou dénombrable de points, de dérivée f_X, et telle que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. De plus, pour tous réels x, a et b tels que $a < b$, on a :

$P(X = x) = 0$; $P(X \leq x) = P(X < x)$; $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)dt$.

Espérance mathématique. **Variance**. **Ecart-type**.

Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, et sous réserve que les intégrales suivantes existent, on a :
- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$ (ce nombre représente la valeur moyenne de X) ;
- $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)dx$; $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - (E(X))^2$;
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$; intervalle moyen de X : $[E(X) - \sigma(X), E(X) + \sigma(X)]$.

Lois classiques : **Uniforme**, **Exponentielle et Normale**

Loi Uniforme sur $[a,b]$. $\Omega_X = [a,b]$, $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a,b] \\ 0 \text{ si } x \notin [a,b] \end{cases}$ $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } x \in [a,b] \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Loi Exponentielle de paramètre θ, avec $\theta > 0$.

$\Omega_X = [0,+\infty[$, $f_X(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$, $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\theta x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$, $E(X) = \frac{1}{\theta}$ et $V(X) = \frac{1}{\theta^2}$.

Loi Normale de paramètres μ et σ, avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

$\Omega_X = \mathbb{R}$ et $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Voir le paragraphe suivant.

2. Loi Normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$.

2.1. Cas de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ (loi normale centrée réduite).

On a $\Omega_X = \mathbb{R}$ et $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a de plus $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

La fonction de répartition de X est donnée par $\phi(x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction n'étant pas exprimable par des fonctions usuelles, on utilise généralement une valeur approchée de cette fonction. Ses valeurs sont tabulées pour les $x \geq 0$ (table 1). Pour les $x < 0$, on peut utiliser la formule $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$ (formule valable pour tout réel x)

La table ne donne des valeurs approchées de $\phi(x)$ que pour des x compris entre 0 et 3. On pourra admettre que $\phi(x) \simeq 1$ pour tout $x \geq 3$.

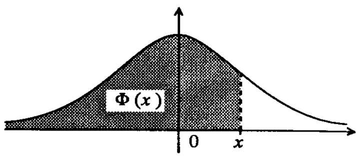
On peut démontrer que ϕ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$. Ainsi, pour tous réels x et y, on a : $\phi(x) = \phi(y) \iff x = y$ et $\phi(x) < \phi(y) \iff x < y$.

TABLE 1

Fonction de répartition de la loi normale réduite

Si U suit la loi normale réduite, pour $x \geqslant 0$, la table donne la valeur : $\phi(x) = P(U \leqslant x)$.

La valeur x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.
Pour $x < 0$, on a :
$\phi(x) = 1 - \phi(-x)$.



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

Quelques valeurs supplémentaires

x	$\phi(x)$
2,99	0,998605
3,00	0,998650
3,50	0,999767
4,00	0,999968
4,50	0,999997
5,00	1,000000

Exemple de calcul.
Soit X une v.a.r. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On a : $P(X \leq 1,23) = \phi(1,23) = 0,8907$ et $P(-0,06 \leq X \leq 1,23) = \phi(1,23) - \phi(-0,06) = \phi(1,23) - (1 - \phi(0,06)) = \phi(1,23) + \phi(0,06) - 1$ $= 0,8907 + 0,5239 - 1 = 0,4146$.

2.2. Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

On a $\Omega_X = \mathbb{R}$ et $f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le paramètre μ est un paramètre de localisation (point où f_X atteint son maximum), et le paramètre σ un paramètre d'échelle, caractérisant l'applatissement de la courbe en cloche représentative de f_X.

Proposition.
X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ si et seulement si $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
On a alors $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$. Ainsi, μ est la moyenne de X et σ est l'écart-type de X.

Exemple de calcul.
Soit X une v.a.r. de loi normale $\mathcal{N}(2,10)$. Alors $Y = \dfrac{X-2}{10}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On a :
$P(X \leq 14,3) = P\left(\dfrac{X-2}{10} \leq \dfrac{14,3-2}{10}\right) = P(Y \leq 1,23) = \phi(1,23) = 0,8907$
$P(1,4 \leq X \leq 14,3) = P\left(\dfrac{1,4-2}{10} \leq \dfrac{X-2}{10} \leq \dfrac{14,3-2}{10}\right) = P(-0,06 \leq Y \leq 1,23)$
$= \phi(1,23) - \phi(-0,06) = \cdots = 0,4146$.

2.3. Approximation de la loi Binomiale par la loi Normale

Soit X une variable aléatoire de loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Si n est "grand" et p "pas trop petit", alors X suit approximativement la loi Normale $\mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$ (de même moyenne et même écart-type que la Binomiale).

En pratique, ce résultat s'applique dès que $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$. (Autres conditions possibles : $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$).

Exemple.
On jette $n = 12000$ fois un dé équilibré. On cherche la probabilité que le nombre de 6 obtenus soit compris entre 1800 et 2100. Le nombre X de 6 obtenus suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 12000$ et $p = \dfrac{1}{6}$. Comme $np = 2000 \geq 10$ et $n(1-p) = 10000 \geq 10$, on peut utiliser l'approximation par la loi Normale $\mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right) = \mathcal{N}\left(2000, \sqrt{12000\frac{1}{6}\frac{5}{6}}\right) = \mathcal{N}\left(2000, \dfrac{100}{\sqrt{6}}\right)$:

Ainsi, $Z = \dfrac{X-2000}{\frac{100}{\sqrt{6}}}$ suit approximativement la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$. On a alors :

$$P(1800 \leq X \leq 2100) = P\left(\dfrac{1800-2000}{\frac{100}{\sqrt{6}}} \leq \dfrac{X-2000}{\frac{100}{\sqrt{6}}} \leq \dfrac{2100-2000}{\frac{100}{\sqrt{6}}}\right) = P(-4,90 \leq Z \leq 2,45)$$

$\simeq \phi(2,45) - \phi(-4,90) = \phi(2,45) + \phi(4,90) - 1 \simeq 0,9929 + 1 - 1 = 0,9929$.
Le calcul direct serait possible mais plus fastidieux :

$$P(1800 \leq X \leq 2100) = \sum_{k=1800}^{2100} P(X = k) = \sum_{k=1800}^{2100} \binom{12000}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{12000-k} \simeq 0,993.$$

Correction de continuité
Approchant une loi discrète (à valeurs entières) par une loi continue (avec valeurs réelles), il est utile de distinguer inégalités stricte et large. Pour se faire, on effectue une correction de continuité. Ainsi, pour approcher $P(X = k)$, on effectue le calcul suivant :

$$P(X=k)=P\left(k-\frac{1}{2}<X\leq k+\frac{1}{2}\right)\simeq\phi\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\phi\left(\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

On a alors, pour tous entiers m et m' :

$$P(m\leq X\leq m')=P\left(m-\frac{1}{2}<X\leq m'+\frac{1}{2}\right)\simeq\phi\left(\frac{\left(m'+\frac{1}{2}\right)-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\phi\left(\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Le calcul de l'exemple précédent est alors légèrement modifié.

Exemple.

Reprenons l'exemple précédent. On a :

$$P(1800\leq X\leq 2100)=P\left(1800-\frac{1}{2}\leq X\leq 2100+\frac{1}{2}\right)=P(1799,5\leq X\leq 2100,5)$$

$$=P\left(\frac{1799,5-2000}{\frac{100}{\sqrt{6}}}\leq\frac{X-2000}{\frac{100}{\sqrt{6}}}\leq\frac{2100,5-2000}{\frac{100}{\sqrt{6}}}\right)=P(-4,91\leq Z\leq 2,46)$$

$$\simeq\phi(2,46)-\phi(-4,91)=\phi(2,46)+\phi(4,91)-1\simeq 0,9931+1-1=0,9931.$$

3. Exercices

Exercice 1.

1) Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.
   a) Calculer $P(X\leq 2)$ et $P(0\leq X\leq 1)$.
   b) Déterminer le réel x tel que $P(X\leq x)=0,975$.
2) Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(4;2)$.
   a) Calculer $P(X\leq 6)$ et $P(0\leq X\leq 6)$.
   b) Déterminer le réel x tel que $P(X\leq x)=0,975$.
   c) Déterminer le réel x tel que $P(X\leq x)=0,25$.

Exercice 2.

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$. Calculer $P(X\leq\mu+\sigma)$, $P(\mu-\sigma\leq X\leq\mu+\sigma)$, $P(\mu-2\sigma\leq X\leq\mu+2\sigma)$ et $P(\mu-3\sigma\leq X\leq\mu+3\sigma)$.

Exercice 3.

A partir des données obtenues ces dernières années, on peut supposer que l'âge auquel un enfant commence à marcher est une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne $\mu=13$ mois et d'écart-type $\sigma=1,5$ mois.

1) Quelle est la probabilité qu'un enfant commence à marcher avant 11 mois ? 15 mois ?
2) Quelle est la probabilité qu'un enfant commence à marcher entre 11 et 15 mois ?
3) Quelle est la probabilité qu'un enfant commence à marcher à 13 mois exactement ?
4) Quel risque prend-on en pariant qu'un enfant commencera à marcher entre 12 et 14 mois ?

Exercice 4.

Une machine fabrique un très grand nombre de pièces d'un même modèle. Une pièce fabriquée est conforme si son épaisseur est comprise en $14,3$ et $15,5$ mm.

On considère la variable aléatoire X qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur en millimètres. La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ. La moyenne μ dépend du réglage de la machine.

1) Dans cette question, on suppose que $\sigma=0,35$. De plus, la machine a été réglée de sorte que $\mu=15$.
   a) Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée soit conforme.
   b) Déterminer le nombre réel positif h tel que $P(15-h\leq X\leq 15+h)=0,95$.
   c) Interpréter le résultat de la question 1) b).

2) La machine est désormais réglée de sorte que $\mu=14,9$.
   Quel devrait être alors l'écart type σ pour que le pourcentage de pièces conformes soit égal à 90% ?

3) On admet que le pourcentage de pièces conformes dans la production d'une journée est de 90%. On prélève au hasard un lot de 200 pièces dans la production pour vérification de l'épaisseur. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On désigne par Y la variable aléatoire associant à chaque lot de 200 pièces le nombre de pièces non conformes du lot.

a) Justifier que Y suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

b) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 20 pièces non conformes dans ce lot.

c) Justifier que l'on peut approcher la loi de Y par une loi normale dont on précisera les paramètres, puis calculer une valeur approchée de la probabilité demandée dans la question 3) b).

Exercice 5.

Une étude sur la myrosine, enzyme parfois présente dans les graines de moutarde, a montré que la proportion de plants de moutarde noire qui contient cette enzyme est égale à 0,13. On prélève un échantillon de 160 plants de moutarde dans une grande production.

1) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre de ces plants qui contiennent de la myrosine. Justifier.

2) Calculer la probabilité que le nombre de plants contenant de la myrosine soit compris entre 16 et 25, en utilisant une approximation à l'aide de la loi normale.

Exercice 6.

Virginie a un rendez-vous avec Paul à la sortie de l'UFR des Sciences lundi à 19h00, après son TD de Probabilités et Statistique. Mais elle ne pourra l'attendre plus de 5 minutes. Paul, qui suit un cours de Sociologie sur le Campus, estime qu'il peut arriver sur le lieu du rendez-vous à tout moment entre 18h55 et 19h10 de manière équiprobable. Si cette hypothèse est exacte, quelle est la probabilité de Paul rencontre Virginie ?

Exercice 7. *(D'après examen de mai 2013)*

Une entreprise fabrique des appareils électroniques en grande série et s'intéresse à leur durée de bon fonctionnement. On considère cette durée, exprimée en heures, comme une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\theta = 0,0004$.

1) Quelle est la durée moyenne de bon fonctionnement d'un appareil ?

2) Calculer la probabilité qu'un appareil ait une durée de bon fonctionnement inférieure ou égale à 600 heures.

3) En déduire la probabilité qu'un appareil fonctionne encore après 600 heures d'utilisation.

4) Déterminer le plus grand nombre entier n_0 tel que $P(X > n_0) \geq 0,95$. Interpréter ce résultat.

5) L'emballage de cet appareil porte la mention « durée de fonctionnement supérieure à 100 heures ». Pour un appareil choisi au hasard, la probabilité que cette mention soit fausse est-elle inférieure à 0,05 ? Justifier la réponse.

Exercice 8. *(D'après examen de janvier 2012)*

Une entreprise vend des appareils électriques. On admet que la durée de bon fonctionnement de chacun de ces appareils exprimée en mois est une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre θ.

1) Rappeler l'expression de la fonction de répartition F_X de X. En déduire que

$$P(X > x) = \begin{cases} e^{-\theta x} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

On suppose que chacun des appareils a une probabilité $p = 0,02$ de tomber en panne durant les 6 premiers mois de son utilisation.

2) a) A l'aide de F_X et de p, déterminer le paramètre θ.

b) Calculer la probabilité $P\left(X > 8 \,/\, X > 2\right)$, et comparer avec $P(X > 6)$. Interpréter ce résultat.

3) Cette entreprise a vendu n appareils. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui tombent en panne pendant les 6 premiers mois de leur utilisation.

Justifier que Y suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y.

4) On suppose que $n = 100$ et on utilise un tableur pour obtenir la loi de probabilité de Y.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Loi Binomiale B(n,p)			n	100		p	0,02
2								
3	k	0	1	2	3	4	5	6
4	P(Y=k)	0,1326	0,2707	0,2734	0,1823	0,0902	0,0353	0,0114
5	$F_Y(k)=P(Y\leq k)$	0,1326	0,4033	0,6767	0,8590	0,9492	0,9845	0,9959
6								

a) En déduire la probabilité de l'événement $Y = 4$, puis celles de $Y < 4$ et $Y \leq 4$.

b) L'entreprise envisage de vendre les appareils avec une garantie de 6 mois et pour cela majore de 3 euros le prix de chaque appareil. En revanche, elle assume durant cette période de garantie les réparations (toujours de même nature) estimées à 75 euros. La majoration du prix de vente par appareil suffit-elle à couvrir avec une probabilité supérieure ou égale à 0,90 les frais de réparation entraînés par cette politique de vente si l'entreprise vend 100 appareils ?

5) On suppose que $n = 1000$. Calculer la probabilité qu'il y ait entre 15 et 25 appareils qui tombent en panne pendant les 6 premiers mois de leur utilisation. On pourra calculer une valeur approchée de cette probabilité en utilisant une loi approchée de la loi de Y et en justifiant l'approximation utilisée.

Exercice 9.

La durée de vie d'un certain type de diode de radio est supérieure à 100 heures. Après cela, cette durée de vie X est une variable aléatoire de densité de probabilité :

$$f_X(x) = \frac{100}{x^2} \quad \text{si } x > 100.$$

1) Donner l'expression de f_X sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction de répartition de X.

2) La variable aléatoire X admet-elle une espérance mathématique ? Si oui, la calculer.

3) Quelle est la probabilité qu'une diode tombe en panne durant ses 150 premières heures de fonctionnement ?

4) Une radio possède 5 diodes de ce type, mises en fonctionnement simultanément et dont les durées de vie sont supposées indépendantes. Quelle est la probabilité qu'exactement 2 des 5 diodes tombent en panne lors des 150 premières heures de service de la radio ?