

Topologie
Feuille 1: révisions

Exercice 1. Ensembles

1. Ecrire l'ensemble de parties $\{a, b, c, d\}$.
2. Soient $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ et $C = \{2, 3\}$ trois sous-ensembles de $\{0, \dots, 10\}$. Calculer A^c , B^c , C^c , $A \cup B$, $A \cap C$ et $B \cap C$.
3. Soient A, B, C trois ensembles.
 - a. Si $A \cup B = B \cap A$, alors $A = B$.
 - b. Si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$ alors $B = C$.
4. (Quelques lois de Morgan) Soient A, B deux ensembles.
 - a. $(A^c)^c = A$.
 - b. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
 - c. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Exercice 2. Image réciproque et directe

1. Soit l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par: $f(x) = x^2 + 1$. Déterminer l'image réciproque et directe par f des ensembles suivantes:

$$[0, 1],]-1, 4[, [0, +\infty[,]-\infty, 5[.$$

2. Soient E et F deux ensembles non vides. Soit f une application de E dans F .
 - a. Montrer que: $\forall A \subset E, f^{-1}(f(A)) \supset A$.
 - b. Montrer que: $\forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Exercice 3. Bornes supérieure et inférieure

1. Soient A et B deux parties non vides de \mathbb{R} telles que

$$\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b.$$

Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

2. Soient A et B deux parties non vides et bornées de \mathbb{R} telles que $A \subset B$. Comparer $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$ et $\sup B$.
3. Soient A , B et $A \cup B$ trois parties non vides et majorées de \mathbb{R} . Montrer que $\sup A$, $\sup B$ et $\sup(A \cup B)$ existent et

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B).$$