Université de Picardie Jules Verne 2015 - 2016
L2 Mathématiques

Topologie
Feuille 2: Espaces normés

Exercice 1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose:

$$N_1(x,y) = |x| + |y|,\ N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},\ N_\infty(x,y) = \max(|x|,|y|).$$

1. Vérifier qu'on a définit ainsi trois normes sur le plan $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer les inégalites
$$N_\infty(x,y) \leq N_2(x,y) \leq N_1(x,y) \leq \sqrt{2}N_2(x,y) \leq 2N_\infty(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
3. Pour tout $p \in [0, +\infty[$ introduire la norme N_p sur $\mathbb{R}^2$ (en généralisant les formules de définition des normes N_1, N_2) et montrer qu'il s'agit bien une norme.

Exercice 2. Soit $\ell^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-ecpace vectoriel formé des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x_n \in \ell^\infty(\mathbb{R})$, on pose

$$||x_n||_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Vérifier qu'on a définit une norme sur l'espace $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour tout $f \in E$

$$||f||_\infty := \sup\{|f(x)|; x \in [0,1]\},\ ||f||_1 := \int_0^1 |f(t)dt.$$

Vérifier qu'on a définit deux norme sur l'espace E. Montrer que, pour tout $f \in E$, $||f||_1 \leq ||f||_\infty$.

Exercice 4. Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On pose $N := \max(N_1, N_2)$. Démontrer que N est une norme sur E.

Exercice 5. Soit E, F deux espaces vectoriels. On suppose qu'il existe une norme $||\cdot||$ sur F. Soit $L : E \to F$, une application linéaire qui est injective. On définit pour tout $x \in E$, $N(x) := ||L(x)||$. Démontrer que N est une norme sur E.

Exercice 6. On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application

$$N : (x,y) \mapsto \max|x|, |2x+y|.$$

Démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et que $\frac{1}{4} \leq N_1 \leq bN_1$, où N_1 est la norme qu'on a definit à l'exercice 1.