Université de Picardie Jules Verne 2015 - 2016
L2 Mathématiques

Topologie
Feuille 3: Norme induite par un produit scalaire

On appelle *produit scalaire* sur un espace vectoriel réel E, toute application qui à tout couple $(x, y) \in E^2$ associe un nombre réel, noté $\langle x, y\rangle$, et qui vérifie les propriétés suivantes:

1. $\forall x \in E$, $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
3. $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.
4. $\forall (x, y, z) \in E^3$, $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$.

Si $\langle \cdot, \cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E, $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ est appelé *espace préhilbertien.*

Exercice 1. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, alors l'inégalité suivante a lieu pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

L'égalité étant réalisée ssi x et y sont liés.

Exercice 2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. On definit $||\cdot|| : E \to [0, +\infty[$ l'application qui à $x \in E$ associe $\sqrt{\langle x, x\rangle}$. Vérifier qu'on a défini une norme sur E.

On dit $||x||$ est induite par le produit scalaire $\langle x, x\rangle$.

Exercice 3. Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. On dit que la norme $||\cdot||$ vérifie *l'identité du parallélogramme* si

$$\forall (x, y) \in E^2, ||x - y||^2 + ||x + y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

1. On suppose que $\forall (x, y) \in E^2$, $||x - y||^2 + ||x + y||^2 \leq 2(||x||^2 + ||y||^2)$. Montrer que $||\cdot||$ vérifie l'identité du parallélogramme.
2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Montrer que la norme qui est induite par le produit scalaire vérifie l'identité du parallélogramme et l'égalité
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\Big(||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\Big).$$
3. Montrer que réciproquement, si $||\cdot||$ vérifie l'identité du parallélogramme, elle est induite par un produit scalaire.

Exercice 4. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $||\cdot||$ la norme qui est induite par le produit scalaire.

1. Montrer que pour tout vecteurs x, y non nuls on a
$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{||x||||y||} \leq 1.$$
(Indication: Utiliser l'exercice 1).
Déduire qu'il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{||x||||y||}$.
2. (Théorème de Pythagore) On dit que $x, y \in E$ sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$. Montrer que deux vecteurs sont orthogonaux ssi
$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$