Université de Picardie Jules Verne 2015 - 2016
L2 Mathématiques

Topologie
Feuille 4: Normes équivalentes et normes d'opérateurs

Exercice 1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit les normes

$$N_1(x,y) = |x| + |y|, \; N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \; N_\infty(x,y) = \max\{|x|, |y|\}.$$

1. Vérifier que les trois normes sont équivalentes.
   (Indication: Utiliser l' exercice 1 de la feuille 2).
2. Dessiner les boules unités fermées associées à ces normes.

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour tout $f \in E$ les normes

$$||f||_\infty := \sup\{|f(x)|; x \in [0,1]\}, \; ||f||_1 := \int_0^1 |f(t)|dt.$$

En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, prouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 3. Soit $a, b > 0$. On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x,y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$.

1. Prouver que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule de centre 0 et de rayon 1.
3. Prouver que les normes N et N_2 sont équivalentes, où N_2 est la norme qu'on a defini à l'exercice 1.

Exercice 4. Soit $a \geq 0$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ on définit

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt$$

.

1. Prouver que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $a, b \geq 0$ avec $a \neq b$ et $b > 1$. Démontrer que les normes N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Démontrer que si $a, b \in [0,1]$, alors les normes N_a et N_b sont équivalentes.

Exercice 5. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul et soit ϕ l'application de $\mathbb{R}^n$ qui à $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe $a_1x_1 + \dots, a_nx_n$. Calculer les normes d'opérateurs associées aux normes N_1 et N_∞, où N_1 et N_∞ sont les normes qu'on a definies à l'exercice 1.

Exercice 6. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et soit ϕ_A l'application linéaire qui à $X \in \mathbb{R}^n$ associe AX. Calculer les normes d'opérateurs associées aux normes N_1 et N_∞, où N_1 et N_∞ sont les normes qu'on a definies à l'exercice 1.

Exercice 7. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $||\cdot||_\infty$. Soit $g(x) = x - \frac{1}{2}$ et soit l'application linéaire continue

$$\begin{array}{llll} \phi : & E & \to \mathbb{R} \\ & f & \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt \end{array}$$

Calculer la norme d'operateur associée à la norme $||\cdot||_\infty$.