Université de Picardie Jules Verne 2015 - 2016
L2 Mathématiques

**Topologie**
**Feuille 5: Espaces métriques**

**Exercice 1. Exemples d'espaces métriques.**

1. Soit $(X, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'application $d : X \to [0, +\infty[$, définie pour tous $x$ et $y$ par $d(x, y) = ||x - y||$ est une distance sur $X$. Déduire que les espaces suivants sont des espaces métriques:
   (a) $X = \mathbb{R}^n$ avec $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$.
   (b) $X = \mathbb{R}^n$ avec $d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.
   (c) $X = \mathcal{C}[0, 1]$ avec $d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$.
2. Soient $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ et $d : \mathbb{R}^+ \to [0, +\infty[$, définie pour tous $x$ et $y$ par $d(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$. Montrer que $\mathbb{R}^+$ est un espace métrique.
3. Soient $X = \mathbb{R}$ et $d_1$, $d_2$ deux applications de $X$ à $[0, +\infty[$ définies pour tous $x$ et $y$ par $d_1(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ et $d_2(x, y) = \arctan|x - y|$. Vérifier qu'on a defini deux distances sur $X$.
4. Soient $E$ un ensemble fini et $\mathcal{P}(S) := \{A \mid A \subseteq E\})$ l'ensemble des parties de $E$. Soit l'application $d : E \to [0, +\infty[$, définie pour tous $A$ et $B$ par
$$d(A, B) = \#\big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big).$$

**Exercice 2. Espace discret.**
Soient $E$ un ensemble et $d : E \to [0, +\infty[$ l'application définie pour tous $x$ et $y$ par $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, y) = 0$ si $x = y$.

1. Démontrer que $d$ est une distance sur $E$; elle est appelée *distance discr è te* sur $E$.
2. Déterminer les boules ouvertes $B(x_0, r)$ où $x_0 \in E$ et $r > 0$.

**Exercice 3.** Soit $(E, d)$ un espace métrique. Vérifier que les applications suivantes sont des distances sur $E$:

1. $d_1(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$.
2. $d_2(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$.
3. $d_3(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

**Exercice 4.** Soit $(E, d_1, d_2)$ un espace métrique. Les applications suivantes sont des distances sur $E$?

1. $d_1 + d_2$.
2. $\frac{1}{3}d_1 + \frac{2}{3}d_2$.
3. $d_1 \cdot d_2$.
4. $d_1^2, d_2^2$.
5. $\max\{d_1, d_2\}$.
6. $\min\{d_1, d_2\}$.