Université de Picardie Jules Verne 2015 - 2016
L2 Mathématiques

Topologie
Feuille 6: Ouverts et fermés

Exercice 1. Soit l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d)$, où $d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés et calculer leur intérieur et leur adhérence.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 2\}$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 > 1\}$.
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = y^2\}$.

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que, pour tout $a \in X$ et pour tout $x \in B(a, r)$

$$B(x, r - d(x, a)) \subset B(a, r).$$

Exercice 3. Soit l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$, où $d(x, y) = |x - y|$. Montrer que

1. $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$.
2. $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})^\circ = \emptyset$.
3. $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé (alors $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé).
4. Montrer que le sous-ensemble $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ n'est ni ouvert ni fermé.
5. Montrer que si on remplace d par la distance discrète, $\mathbb{Q}$ et A sont à la fois ouverts et fermés. Generaliser votre resultat pour à tout sous-ensemble d'espace metrique discret.

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Montrer que l'intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.
2. Montrer que l'union d'un nombre fini d'ensembles fermés est un ensemble fermé.
3. Donner un exemple d'une intersection d'un nombre infini d'ensembles ouverts qui n'est pas un ensemble ouvert.

Exercice 5. Montrer que tout ouvert d'un espace métrique (X, d) est réunion de boules ouvertes.

Exercice 6. Soient (X, d) un espace métrique, A un sous-ensemble ouvert et F un sous-ensemble fermé. Montrer que

1. $A \subset \bar{A}^\circ$.
2. $F \supset \overline{F^\circ}$.

Exercice 7. Soient (X, d) un espace métrique et A un sous-ensemble de X.

1. Montrer que A est fermé si et seulement si pour tout $x \in X$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, alors $x \in A$.
2. Montrer que $x \in \bar{A}$ si et seulement si $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $\epsilon > 0$.
3. Montrer que $(X \backslash A)^\circ = X \backslash \bar{A}$.