Université de Picardie Jules Verne 2015 - 2016
L2 Mathématiques

Topologie
Feuille 7 : Continuité

Exercice 1 *Soit l'espace* $\Big(\mathcal{C}([0,1]\Big), d_\infty)$, *où* $d_\infty(f,g) = sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$. *Montrer que l'application* $\phi : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$, *définie par* $\phi(f) = \int_0^1 f(x)dx$ *est une application continue.*

Exercice 2 *Soient* (X, d) *et* (Y, p) *deux espaces métriques et soit* $f : X \to Y$ *une application.*

1. *Montrer que* f *est continue au point* x_0 *si et seulement si pour toute* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$, *alors* $\lim\limits_{n\to\infty} p\Big(f(x_n), f(x_0)\Big) = 0$.
2. *Soient les espaces normés* $(\mathbb{R}^n, N_p)$ *et* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. *Soient* d_p *et* d *les disntances définies de manière canonique à partir respectivement des normes* N_p *et* $|\cdot|$ *(Feuille 5, exercice 1). Montrer que l'application* $p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *définie par* $p_j(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = x_j$ *est une application continue.*

Exercice 3 *Soit l'espace normé* $(M_n(\mathbb{R}), N)$, *où* N *est une norme quelquonque sur* $M_n(\mathbb{R})$. *Montrer que l'application* $det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *est une application continue.*

Exercice 4 *Déterminer si les applications suivantes sont continues ou uniformément continues.*

1. $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$.
4. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto sinx$.

Exercice 5 *Montrer que l'application* $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ *définie par*

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ *sur sa boule unité ouverte. Generaliser pour un espace vectoriel normé de dimension finie.*
(Indication : Montrer que l'application $x \mapsto \frac{1}{1+||x||}$ *est un homéomorphisme).*

Exercice 6 *Soient* (X, d) *et* (Y, p) *deux espaces métriques et soit* $f : X \to Y$ *une application continue. Montrer que*

1. $\forall A \subset X,\ f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
2. $\forall B \subset Y,\ \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$.

Exercice 7 *Soit* (X, d) *un espace métrique et soit* A *inclus dans* X.

1. *Montrer que l'application* f *qui à* $x \in X$ *associe*

$$d(x, A) := inf\{d(x, y); y \in A\}$$

   est 1-lipschitzienne. Deduire que f *est uniformément continue.*
2. *Montrer que* A *est fermé si et seulement si pour tout* $x \in X$ *tel que* $f(x) = 0$, *alors* $x \in A$.
3. *Soient* B, C *inclus dans* X *tels que* $B \cap C = \emptyset$. *Montrer que si* B *et* C *sont fermés, alors il y a une applications continue* $\phi : X \to [0, 1]$ *telle que* $\phi(b) = 0$ *et* $\phi(c) = 1$, *pour tous* $b \in B$ *et* $c \in C$.