Université de Picardie Jules Verne 2015 - 2016
L2 Mathématiques

Topologie
Feuille 8 : Complétude

Exercice 1 *Soit* $f : X \to Y$ *entre espaces métriques une application uniformément continue et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy dans* X. *Montrer que la suite* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* Y.

Exercice 2 *Soient* (X, d) *une espace métrique et* $F \subset X$. *Montrer que* $x \in \bar{F}$ *si et seulement s' il y a une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* F *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$.

Exercice 3 *Soient* (X, d) *une espace métrique et* $D \subset X$ *tel que* $\bar{D} = X$. *Montrer que si toutes les suites de Cauchy dans* D *sont convergentes, alors* (X, d) *est complet.*

Exercice 4 *Soient* (X, d) *un espace complet et* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante de fermés non vide dont la suite des diamètres tend vers 0. Montrer que l'intersection des* F_n *est un singleton.*

Exercice 5 *On note* $\ell^2(\mathbb{R})$ *l'espace des suites réelles* $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *de carrés sommables normé par*

$$||u||_2 = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(u(n))^2\Big)^{1/2}.$$

Montrer que cet espace normé est complet.

Exercice 6

1. *Montrer que tout espace discret est complet.*
2. *Montrer que l'espace* $(\mathbb{Q}, d)$, *où* $d(x, y) = |x - y|$ *n'est pas complet.*

Exercice 7 *On considère* $E = \mathcal{C}([0, 1])$, *normé par*

$$||f|| = \int_0^1 |f(x)|dx$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, *on considère* $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1/2 - 1/n \\ -nx + n/2, & 1/2 - 1/n \le x \le 1/2 \\ 0, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

1. *Montrer que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy.*
2. *En déduire que l'espace vectoriel normé* $(E, ||\cdot||)$ *n'est pas complet.*

Exercice 8 *Montrer que un espace vectoriel admettant une base algébrique dénombrable non finie ne peut pas être muni d'une norme qui le rende complet (par exemple :* $\mathbb{R}[X]$ *).*
Indication : Utiliser le théorème de Baire.